



Nghiên cứu các tính chất phi cổ điển của trạng thái chồng chất hai mode kết hợp $SU(1, 1)$

Cao Thị Mỹ Hảo, Nguyễn Ngọc Bảo Nguyên, Đỗ Chính Hạp, Trương Minh Đức

Khoa Vật lý, Trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế

THÔNG TIN BÀI BÁO

Quá trình xử lý:

Ngày nhận bài: 14/10/2025

Ngày nhận bản chỉnh sửa: 01/12/2025

Ngày nhận đăng: 02/12/2025

Ngày xuất bản: 20/02/2026

Từ khóa:

Nén tổng hai mode;

Nén hiệu hai mode;

Tính đan rối;

Trạng thái chồng chất hai mode kết hợp $SU(1, 1)$.

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu các tính chất phi cổ điển của trạng thái chồng chất hai mode kết hợp $SU(1, 1)$, đó là tính chất nén tổng hai mode, tính chất nén hiệu hai mode, tính chất phản kết chùm hai mode và tính chất đan rối. Kết quả khảo sát cho thấy trạng thái chồng chất hai mode kết hợp $SU(1, 1)$ thể hiện tính chất nén tổng hai mode, tính chất phản kết chùm hai mode và tính đan rối nhưng không thể hiện tính chất nén hiệu hai mode. Mức độ thể hiện các tính chất phi cổ điển mạnh yếu của trạng thái phụ thuộc vào việc điều chỉnh các tham số phù hợp. Như vậy, trạng thái chồng chất hai mode kết hợp $SU(1, 1)$ là một trạng thái phi cổ điển và các tính chất phi cổ điển của chúng được thể hiện tương đối rõ ràng.

1. GIỚI THIỆU

Sự phát triển vượt bậc của khoa học công nghệ trong đầu thế kỷ 21 đòi hỏi các nhà khoa học trong nước cũng như trên thế giới phải đẩy mạnh và mở rộng các hướng nghiên cứu để đáp ứng nhu cầu hiện tại. Trong xu hướng đó, lĩnh vực thông tin lượng tử đã và đang đóng góp vai trò hết sức quan trọng. Hiện nay, các nhà khoa học đang tích cực nghiên cứu các tính chất của các trạng thái cũng như đề xuất ra các trạng thái phi cổ điển mới. Năm 1963, Glauber (1963) đã đưa ra các trạng thái kết hợp và vào năm 1972, Perelomov đã đề xuất các trạng thái kết hợp tương ứng với các nhóm đối xứng $SU(1, 1)$ và $SU(2)$ (Perelomov, 1972). Các trạng thái hai mode $SU(1, 1)$ và $SU(2)$ có nhiều ứng dụng trong đo lường lượng tử, chẳng hạn như đo pha, đo hệ số tương tác phi tuyến, tạo ra các nguồn rối phi cổ điển mạnh để ứng dụng vào thông tin lượng tử và máy tính lượng tử,... Cho đến nay, các trạng thái kết hợp hai mode $SU(1, 1)$ và $SU(2)$ đã và đang được quan tâm cứu rất nhiều. Chẳng hạn như Wodkiewicz đã nghiên cứu về các ứng dụng của các trạng thái kết hợp hai mode $SU(1, 1)$ và $SU(2)$ trong quang học lượng tử (Wodkiewicz & Eberly, 1985). Vourdas (1990) đã nghiên cứu về trạng thái pha của trạng thái kết hợp hai mode $SU(1, 1)$ và $SU(2)$ hay Brif và cộng sự (1996) đã biểu diễn giải tích dựa trên trạng thái hai mode kết hợp $SU(1, 1)$ và ứng dụng của chúng. Gần đây, các công trình về các trạng thái này cũng được công bố rất nhiều trên các tạp chí uy tín của thế giới. Đơn cử như việc nghiên cứu ảnh hưởng của nhiều nhiệt đến tính phi cổ điển của trạng thái kết hợp $SU(1, 1)$ và $SU(2)$ (Fataneh et al., 2021) hay phân tích và so sánh sự tiến triển của không gian pha phi tuyến tính của các trạng thái kết hợp $SU(2)$ và $SU(1, 1)$ (Rodrigo et al., 2025). Gần đây nhất là tăng cường độ nhạy pha trong máy đo giao thoa Mach-Zehnder với nhiều sơ đồ phát hiện khác nhau sử dụng trạng thái kết hợp $SU(1, 1)$ (Abouelkhir et al., 2025). Trong nước cũng đã có một số công trình nghiên cứu về lĩnh vực này. Có thể kể đến như việc nghiên cứu các tính chất phi cổ điển của trạng thái hai mode kết hợp thêm hai photon tích $SU(1, 1)$ của Nguyễn Ngọc Lâm và cộng sự (2018) hay việc định lượng độ rối và viễn tải lượng tử với trạng thái hai mode kết hợp $SU(1, 1)$ thêm một và bớt một photon lẻ do Nguyễn Thị Thu Hằng và các cộng sự (2019). Tuy nhiên, tính đến thời điểm này vẫn chưa có công trình nghiên cứu về các tính chất phi cổ điển của trạng

Tác giả liên hệ: Cao Thị Mỹ Hảo;

Địa chỉ e-mail: ctmh26012003@gmail.com

DOI: <https://doi.org/10.26459/jse.036.2026>

thái chồng chất hai mode kết hợp $SU(1, 1)$. Tính chồng chất của trạng thái hai mode kết hợp $SU(1, 1)$ hứa hẹn các tính chất phi cổ điển nổi trội hơn và có tiềm năng ứng dụng lớn hơn vào thực hiện các nhiệm vụ trong truyền thông lượng tử so với các trạng thái hai mode kết hợp đơn thuần. Do đó, trong bài báo này chúng tôi nghiên cứu các tính chất phi cổ điển của trạng thái chồng chất hai mode kết hợp $SU(1, 1)$, đó là tính chất nén tổng và nén hiệu hai mode ở mục 2, tính chất phản kết chùm hai mode và tính đan rối ở mục 3 và cuối cùng là phần kết luận.

2. KHẢO SÁT TÍNH CHẤT NÉN CỦA TRẠNG THÁI CHỒNG CHẤT HAI MODE KẾT HỢP $SU(1, 1)$

2.1. Trạng thái chồng chất hai mode kết hợp $SU(1, 1)$

Trạng thái hai mode kết hợp $SU(1, 1)$ được Peremolov đưa ra vào năm 1972 có dạng như sau:

$$|\xi, q\rangle = (1 - |\xi|^2)^{\frac{1+q}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(n+q)!}{n!q!} \right)^{\frac{1}{2}} \xi^n |n+q, n\rangle, \quad (1)$$

trong đó $|\xi, q\rangle$ là ký hiệu của trạng thái, $|n+q, n\rangle$ là trạng thái số hạt Fock hai mode, q là một số nguyên dương, $\xi = -\tanh\left(\frac{\gamma}{2}\right)e^{-i\theta}$ với $0 \leq \gamma \leq \pi$ và $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Để thuận tiện cho quá trình tính toán ở phần sau, ta đặt $\gamma = 2r$ với $0 \leq r \leq \frac{\pi}{2}$. Từ trạng thái kết hợp hai mode $SU(1, 1)$ ở trên, Gerry và Grobe đã đưa ra trạng thái chồng chất hai mode kết hợp $SU(1, 1)$ vào năm 1997 như sau (Gerry & Grobe, 1997):

$$|\xi, q, \varphi\rangle = \mathcal{N}_{a,b} (|\xi, q\rangle + e^{i\varphi} |-\xi, q\rangle), \quad (2)$$

trong đó $|\xi, q, \varphi\rangle$ là ký hiệu của trạng thái với hệ số chuẩn hóa

$$\mathcal{N}_{a,b} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \cos \varphi \left(\frac{1 - |\xi|^2}{1 + |\xi|^2} \right)^{1+q} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (3)$$

trong đó $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

2.2. Khảo sát tính chất nén tổng hai mode của trạng thái chồng chất hai mode kết hợp $SU(1, 1)$

Vào năm 1989, Hillery đã đề xuất tiêu chuẩn nén tổng hai mode thông qua toán tử nén tổng hai mode có dạng như sau:

$$\hat{V}_{(\phi)} = \frac{1}{2} (e^{i\phi} \hat{a}^+ \hat{b}^+ + e^{-i\phi} \hat{a} \hat{b}), \quad (4)$$

trong đó $\hat{a}^+$ và $\hat{b}^+$ lần lượt là các toán tử sinh hạt boson của mode 1 và mode 2, $\hat{a}$ và $\hat{b}$ lần lượt là các toán tử hủy hạt boson của mode 1 và mode 2 với ϕ là một góc thỏa mãn $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Một trạng thái lượng tử thể hiện tính chất nén tổng hai mode khi trung bình trong trạng thái đó thỏa mãn bất đẳng thức sau:

$$\left\langle (\Delta \hat{V}_{\phi})^2 \right\rangle < \frac{1}{4} \left| \left\langle \hat{N}_a + \hat{N}_b + 1 \right\rangle \right|, \quad (5)$$

trong đó $\langle \hat{N}_a \rangle$, $\langle \hat{N}_b \rangle$ lần lượt là trung bình số hạt của mode 1 và mode 2, $\left\langle (\Delta \hat{V}_{\phi})^2 \right\rangle$ là trung bình phương sai của toán tử nén tổng hai mode $\left(\left\langle (\Delta \hat{V}_{\phi})^2 \right\rangle = \left\langle \hat{V}_{\phi}^2 \right\rangle - \left\langle \hat{V}_{\phi} \right\rangle^2 \right)$

Ta đưa ra thông số nén tổng hai mode có dạng

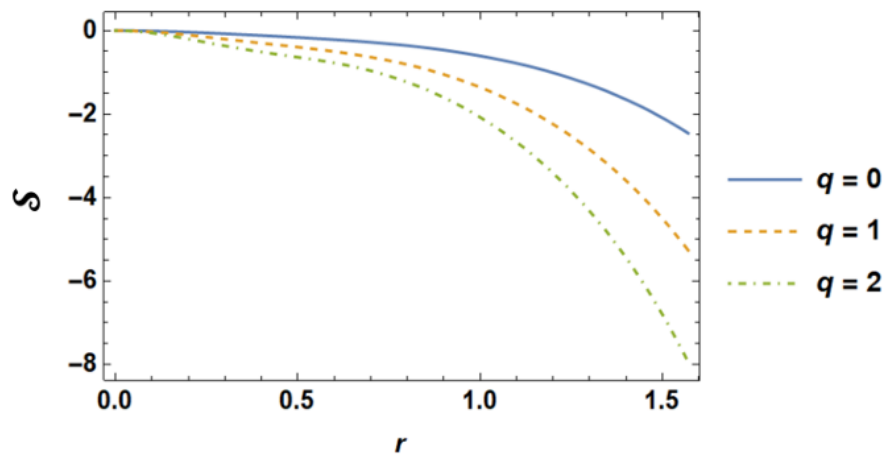
$$\mathcal{S} = \left\langle \hat{V}_{\phi}^2 \right\rangle - \left\langle \hat{V}_{\phi} \right\rangle^2 - \frac{1}{4} \left| \left\langle \hat{N}_a + \hat{N}_b + 1 \right\rangle \right|. \quad (6)$$

Chú ý rằng khi $\mathcal{S} < 0$ thì trạng thái sẽ thể hiện tính chất nén tổng hai mode. Thông số nén tổng hai mode tính trung bình trong trạng thái chồng chất hai mode kết hợp $SU(1, 1)$ được đưa ra bởi phương trình (2) có dạng như sau:

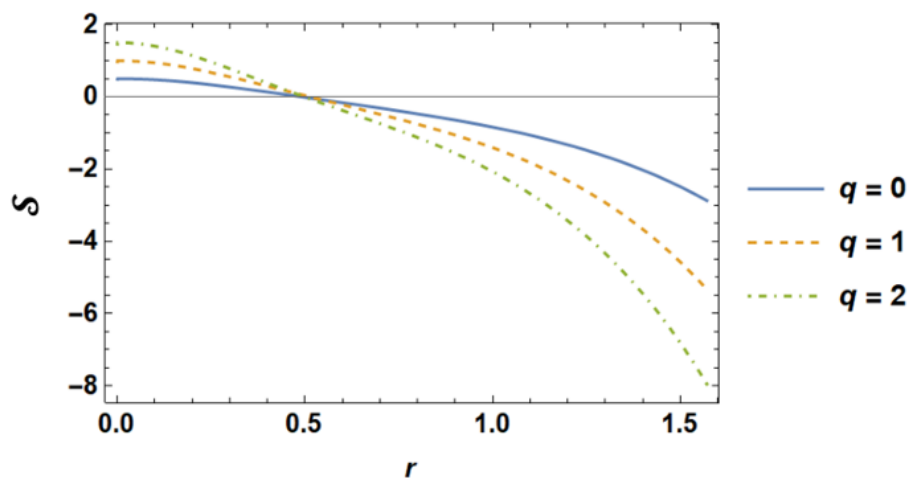
$$\begin{aligned}
\mathcal{S} = & |\mathcal{N}_{a,b}|^2 (1 - \tanh^2(r))^{1+q} \tanh^2(r) \cos(2(\phi + \theta)) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+q+2)!}{n!q!} \tanh^{2n}(r) + \right. \\
& \left. + \cos \varphi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+q+2)!}{n!q!} \tanh^{2n}(r) (-1)^n \right) + |\mathcal{N}_{a,b}|^2 (1 - \tanh^2(r))^{1+q} \times \\
& \times \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+q)!}{n!q!} (n+q) n \tanh^{2n}(r) + \cos \varphi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+q)!}{n!q!} (n+q) n \tanh^{2n}(r) (-1)^n \right) - \\
& - 4 |\mathcal{N}_{a,b}|^4 (1 - \tanh^2(r))^{2(1+q)} \tanh^2(r) \sin^2 \varphi \sin^2(\phi + \theta) \times \\
& \times \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+q+1)!}{n!q!} \tanh^{2n}(r) (-1)^n \right), \tag{7}
\end{aligned}$$

trong đó $\mathcal{N}_{a,b}$ là hệ số chuẩn hóa đã đưa ra ở phương trình (3).

Đồ thị hình 1 và hình 2 khảo sát sự phụ thuộc của thông số nén tổng hai mode $\mathcal{S}$ vào tham số r đối với trạng thái chồng chất hai mode kết hợp $SU(1, 1)$. Kết quả cho thấy trạng thái chồng chất hai mode kết hợp $SU(1, 1)$ đều thể hiện tính chất nén tổng hai mode đối với các giá trị $q = 0, 1, 2$ khi $\varphi = 0$ và $\varphi = \pi$. Khi các tham số r và q tăng lên thì ta thấy các đường đồ thị có độ dốc càng lớn về phía phần âm của trục $\mathcal{S}$, điều này chứng tỏ trạng thái thể hiện tính chất nén tổng hai mode càng mạnh khi các tham số kể trên càng tăng. Tuy nhiên, đối với trường hợp $\varphi = \pi$, ta thấy trạng thái bắt đầu thể hiện tính chất nén tổng hai mode khi $r > 0.5$, còn khi $r < 0.5$ thì hiệu ứng nén hoàn toàn biến mất. Còn đối với trường hợp $\varphi = 0$ thì trạng thái bắt đầu thể hiện tính chất nén tổng hai mode khi $r > 0$.



Hình 1. Sự phụ thuộc của thông số nén tổng hai mode $\mathcal{S}$ vào tham số r đối với trạng thái chồng chất hai mode kết hợp $SU(1, 1)$, cho $q = 0, 1, 2$ với $\sin^2(\phi + \theta) = 1$, $\cos(2(\phi + \theta)) = -1$ và $\varphi = 0$.



Hình 2. Sự phụ thuộc của thông số nén tổng hai mode $\mathcal{S}$ vào tham số r đối với trạng thái chồng chất hai mode kết hợp $SU(1, 1)$, cho $q = 0, 1, 2$ với $\sin^2(\phi + \theta) = 1$, $\cos(2(\phi + \theta)) = -1$ và $\varphi = \pi$.

2.3. Khảo sát tính chất nén hiệu hai mode của trạng thái chồng chất hai mode kết hợp $SU(1, 1)$

Cùng với tính chất nén tổng hai mode, Hillery cũng đã đưa ra tiêu chuẩn nén hiệu hai mode vào năm 1989 và toán tử nén hiệu hai mode có dạng như sau:

$$\hat{W}_{(\phi)} = \frac{1}{2} \left(e^{i\phi} \hat{a} \hat{b}^+ + e^{-i\phi} \hat{a}^+ \hat{b} \right), \quad (8)$$

trong đó các toán tử sinh hủy $\hat{a}^+$, $\hat{b}^+$, $\hat{a}$, $\hat{b}$ và ϕ đã được trình bày ở mục 2.2. Một trạng thái lượng tử được gọi là nén hiệu hai mode khi trung bình trong trạng thái đó thỏa mãn bất đẳng thức sau:

$$\left\langle \left(\Delta \hat{W}_{\phi} \right)^2 \right\rangle < \frac{1}{4} \left| \left\langle \hat{N}_a - \hat{N}_b \right\rangle \right|, \quad (9)$$

trong đó các trung bình $\langle \hat{N}_a \rangle$, $\langle \hat{N}_b \rangle$, $\left\langle \left(\Delta \hat{W}_{\phi} \right)^2 \right\rangle$ đã được trình bày ở mục 2.2. Ta đưa ra thông số nén hiệu hai mode có dạng như sau:

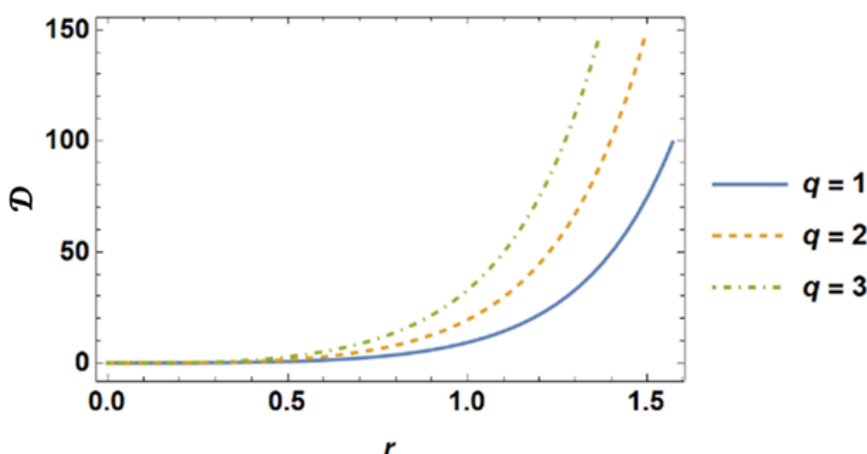
$$\mathcal{D} = \left\langle \hat{V}_{\phi}^2 \right\rangle - \left\langle \hat{V}_{\phi} \right\rangle^2 - \frac{1}{4} \left| \left\langle \hat{N}_a - \hat{N}_b \right\rangle \right|. \quad (10)$$

Khi $\mathcal{D} < 0$ thì trạng thái sẽ thể hiện tính chất nén hiệu hai mode. Thông số nén hiệu hai mode tính trong trạng thái chồng chất hai mode kết hợp $SU(1, 1)$ đưa ra ở phương trình (2) có dạng như sau:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = & \frac{1}{2} |\mathcal{N}_{a,b}|^2 (1 - \tanh^2(r))^{1+q} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+q)!}{n!q!} (n+q+1) n \tanh^{2n}(r) + \right. \\ & + \cos \varphi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+q)!}{n!q!} (n+q+1) n \tanh^{2n}(r) (-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+q)!}{n!q!} (n+q)(n+1) \times \\ & \times \tanh^{2n}(r) + \cos \varphi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+q)!}{n!q!} (n+q)(n+1) \tanh^{2n}(r) (-1)^n \Bigg) - \\ & - \frac{1}{2} |\mathcal{N}_{a,b}|^2 \left((1 - \tanh^2(r))^{1+q} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+q)!}{n!q!} (n+q) \tanh^{2n}(r) + \right. \right. \\ & + \cos \varphi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+q)!}{n!q!} (n+q) \tanh^{2n}(r) (-1)^n \Bigg) - (1 - \tanh^2(r))^{1+q} \times \\ & \times \left. \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+q)!}{n!q!} n \tanh^{2n}(r) + \cos \varphi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+q)!}{n!q!} n \tanh^{2n}(r) (-1)^n \right) \right|, \quad (11) \end{aligned}$$

trong đó $\mathcal{N}_{a,b}$ là hệ số chuẩn hóa đã được trình bày ở phương trình (3).

Đồ thị hình 3 khảo sát sự phụ thuộc của thông số nén hiệu hai mode $\mathcal{D}$ vào tham số r đối với trạng thái chồng chất hai mode kết hợp $SU(1, 1)$. Từ đồ thị ta dễ dàng nhận thấy không có bất cứ giá trị nào của q cho các đường đồ thị có nhánh nằm về phía phần âm của trục $\mathcal{D}$. Từ đó cho thấy trạng thái chồng chất hai mode kết hợp $SU(1, 1)$ không thể hiện tính chất nén hiệu hai mode.



Hình 3. Sự phụ thuộc của thông số nén hiệu hai mode $\mathcal{D}$ vào tham số r đối với trạng thái chồng chất hai mode kết hợp $SU(1, 1)$ cho các trường hợp $q = 0, 1, 2$.

3. KHẢO SÁT TÍNH CHẤT PHẢN KẾT CHÙM HAI MODE VÀ TÍNH ĐẠN RỜI CỦA TRẠNG THÁI CHỒNG CHẤT HAI MODE KẾT HỢP SU(1,1)

3.1. Khảo sát tính chất phản kết chùm hai mode của trạng thái chồng chất hai mode kết hợp SU (1, 1)

Tính chất phản kết chùm được Kimble-Mandel (1976) và Carmichael-Walls dự đoán bằng lý thuyết vào năm 1976, sau đó được Kimble-Dagencus-Madel kiểm chứng bằng thực nghiệm vào năm 1977. Sau này, Lee (1990) đã đưa ra tiêu chuẩn phản kết chùm hai mode có dạng như sau:

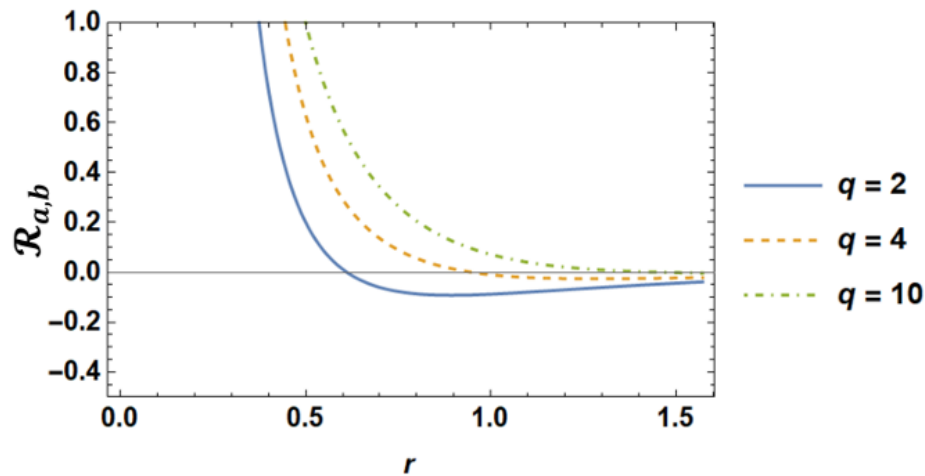
$$\mathcal{R}_{a,b}(l, p) = \frac{\langle \hat{N}_a^{(l+1)} \rangle \langle \hat{N}_b^{(p-1)} \rangle + \langle \hat{N}_a^{(p-1)} \rangle \langle \hat{N}_b^{(l+1)} \rangle}{\langle \hat{N}_a^{(l)} \rangle \langle \hat{N}_b^{(p)} \rangle + \langle \hat{N}_a^{(p)} \rangle \langle \hat{N}_b^{(l)} \rangle} - 1 < 0, \quad (12)$$

trong đó $\mathcal{R}_{a,b}(l, p)$ là thông số phản kết chùm hai mode, $\hat{N}_a = a^+a$ và $\hat{N}_b = b^+b$ lần lượt là toán tử số hạt boson ở mode 1 và mode 2, l và p là các số nguyên dương và thỏa mãn $l \geq p$. Từ phương trình (12), thông số phản kết chùm hai mode tính trong trạng thái chồng chất hai mode kết hợp SU (1, 1) đưa ra ở phương trình (2) có dạng như sau:

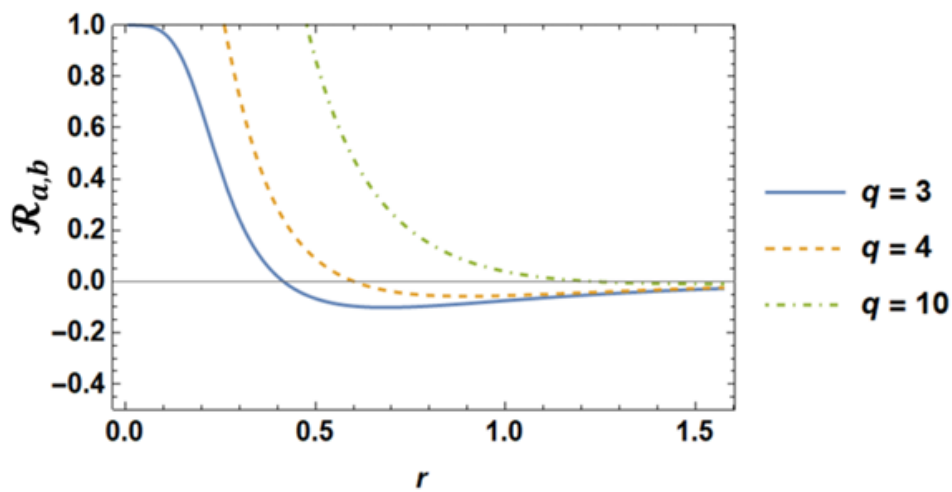
$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{a,b}(l, p) = & \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+q)!}{n!q!} \frac{(n+q)!}{(n+q-l-1)!} \frac{n!}{(n-p+1)!} |\xi|^{2n} + \right. \\ & + \cos \varphi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+q)!}{n!q!} \frac{(n+q)!}{(n+q-l-1)!} \frac{n!}{(n-p+1)!} |\xi|^{2n} (-1)^n + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+q)!}{n!q!} \frac{(n+q)!}{(n+q-p+1)!} \frac{n!}{(n-l-1)!} |\xi|^{2n} + \\ & \left. + \cos \varphi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+q)!}{n!q!} \frac{(n+q)!}{(n+q-p+1)!} \frac{n!}{(n-l-1)!} |\xi|^{2n} (-1)^n \right) \times \\ & \times \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+q)!}{n!q!} \frac{(n+q)!}{(n+q-l)!} \frac{n!}{(n-p)!} |\xi|^{2n} + \right. \\ & + \cos \varphi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+q)!}{n!q!} \frac{(n+q)!}{(n+q-l)!} \frac{n!}{(n-p)!} |\xi|^{2n} (-1)^n + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+q)!}{n!q!} \frac{(n+q)!}{(n+q-p)!} \frac{n!}{(n-l)!} |\xi|^{2n} + \\ & \left. + \cos \varphi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+q)!}{n!q!} \frac{(n+q)!}{(n+q-p)!} \frac{n!}{(n-l)!} |\xi|^{2n} (-1)^n \right)^{-1} - 1, \quad (13) \end{aligned}$$

trong đó $|\xi|^2 = \tanh^2(r)$ với $0 \leq r \leq \frac{\pi}{2}$ và $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Đồ thị hình 4 biểu diễn sự phụ thuộc của thông số phản kết chùm $\mathcal{R}_{a,b}(1,1)$ vào tham số r của trạng thái chồng chất hai mode kết hợp SU (1, 1) khi $l = 1, p = 1$ và đồ thị hình 5 biểu diễn sự phụ thuộc của thông số phản kết chùm $\mathcal{R}_{a,b}(5,4)$ vào tham số r của trạng thái chồng chất hai mode kết hợp SU (1, 1) khi $l = 5, p = 4$. Kết quả cho thấy trạng thái chồng chất hai mode kết hợp SU (1, 1) đã thể hiện tính chất phản kết chùm đối với cả hai trường hợp và tính chất này sẽ biến đổi mạnh yếu tùy thuộc vào r . Tuy nhiên, đối với trường hợp $l = 1, p = 1$ thì trạng thái chỉ thể hiện tính chất phản kết chùm khi $q = 2, 4$ và thể hiện mạnh hơn khi $q = 2$. Tương tự, đối với trường hợp $l = 5, p = 4$ thì trạng thái chỉ thể hiện tính chất phản kết chùm khi $q = 3, 4$ và thể hiện mạnh hơn khi $q = 3$. Qua đó ta thấy rằng không phải bất cứ giá trị nào của q thì trạng thái chồng chất hai mode kết hợp SU (1, 1) cũng cho tính chất phản kết chùm.



Hình 4. Sự phụ thuộc của thông số $\mathcal{R}_{a,b}(1,1)$ vào tham số r đối với trạng thái chồng chất hai mode kết hợp $SU(1,1)$, cho $q = 2, 4, 10$.



Hình 5. Sự phụ thuộc của thông số $\mathcal{R}_{a,b}(5,4)$ vào tham số r đối với trạng thái chồng chất hai mode kết hợp $SU(1,1)$, cho $q = 3, 4, 10$.

3.2. Khảo sát tính đan rối của trạng thái chồng chất hai mode kết hợp $SU(1,1)$

Tiêu chuẩn đan rối Hillery-Zubairy đã được hai nhà khoa học cùng tên đề xuất lần đầu vào năm 2006. Tiêu chuẩn này được phát biểu dưới dạng bất đẳng thức như sau:

$$\left| \langle \hat{a}^{+m} \hat{b}^{+n} \rangle \right|^2 > \langle \hat{a}^{+m} \hat{a}^m \rangle \langle \hat{b}^{+n} \hat{b}^n \rangle, \quad (14)$$

trong đó các toán tử sinh hủy $\hat{a}^+, \hat{b}^+, \hat{a}, \hat{b}$ đã được trình bày ở mục 2.2. Để thuận tiện cho việc nghiên cứu, ta đưa ra đại lượng đặc trưng cho tính đan rối gọi là thông số đan rối dưới dạng

$$\mathcal{E} = \langle \hat{a}^{+m} \hat{a}^m \rangle \langle \hat{b}^{+n} \hat{b}^n \rangle - \left| \langle \hat{a}^{+m} \hat{b}^{+n} \rangle \right|^2. \quad (15)$$

Trạng thái chồng chất hai mode kết hợp $SU(1,1)$ sẽ thể hiện tính đan rối khi $\mathcal{E} < 0$ và ngược lại khi $\mathcal{E} \geq 0$ thì trạng thái sẽ không thể hiện tính đan rối. Chúng tôi đã tính toán thông số đan rối trong trạng thái chồng chất hai mode kết hợp $SU(1,1)$ đưa ra ở phương trình (2) trong các trường hợp như sau:

- Đối với trường hợp $m \neq n$ thì ta dễ dàng nhận thấy thông số đan rối $\mathcal{E}$ lúc này bằng 0. Do đó trạng thái sẽ không thể hiện tính đan rối.

- Đối với trường hợp $m = n = 2k + 1$ với $k = 0$:

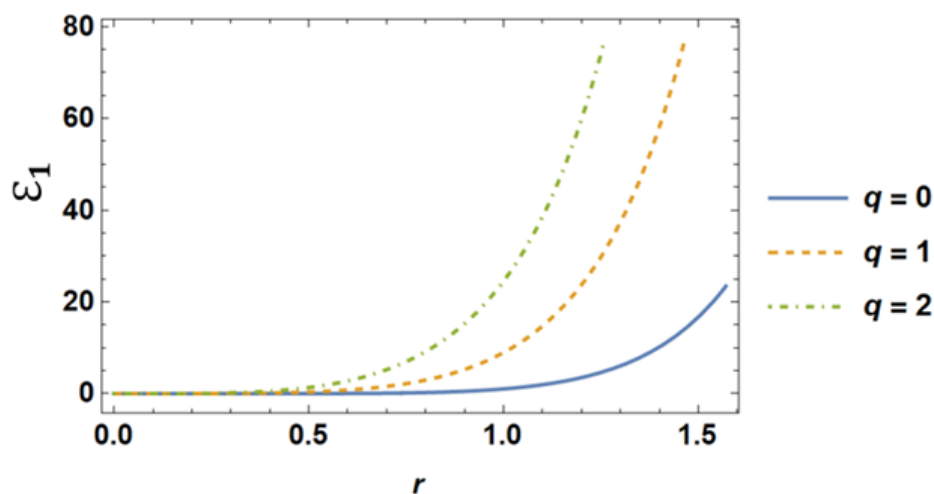
$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 = & 4|\mathcal{N}_{a,b}|^4 (1 - \tanh^2(r))^{2(1+q)} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+q)!}{n!q!} (n+q) \tanh^{2n}(r) + \right. \\
& + \cos \varphi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+qs)!}{n!q!} (n+q) \tanh^{2n}(r) (-1)^n \left. \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+q)!}{n!q!} n \tanh^{2n}(r) + \right. \right. \\
& + \cos \varphi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+q)!}{n!q!} n \tanh^{2n}(r) (-1)^n \left. \right) - 4 \sin^2 \varphi |\mathcal{N}_{a,b}|^4 (1 - \tanh^2(r))^{2(1+q)} \times \\
& \times |\xi|^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+q+1)!}{n!q!} \tanh^{2n}(r) (-1)^n \right)^2, \quad (16)
\end{aligned}$$

trong đó $\mathcal{N}_{a,b}$ là hệ số chuẩn hóa đã được trình bày ở phương trình (3) và $|\xi|^2 = \tanh^2(r)$.

Đối với trường hợp $m = n = 2k + 1$ với $k = 1$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_2 = & 4|\mathcal{N}_{a,b}|^4 (1 - \tanh^2(r))^{2(1+q)} \left(\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+q)!}{n!q!} (n+q)^2 \tanh^{2n}(r) + \right. \right. \\
& + \cos \varphi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+q)!}{n!q!} (n+q)^2 \tanh^{2n}(r) (-1)^n \left. \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+q)!}{n!q!} n^2 \tanh^{2n}(r) + \right. \\
& + \cos \varphi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+q)!}{n!q!} n^2 \tanh^{2n}(r) (-1)^n \left. \right) - |\xi|^4 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+q+2)!}{n!q!} \times \right. \\
& \times \tanh^{2n}(r) + \cos \varphi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+q+2)!}{n!q!} \tanh^{2n}(r) (-1)^n \left. \right)^2 \left. \right), \quad (17)
\end{aligned}$$

trong đó $\mathcal{N}_{a,b}$ là hệ số chuẩn hóa đã được trình bày ở phương trình (3) và $|\xi|^2 = \tanh^2(r)$.

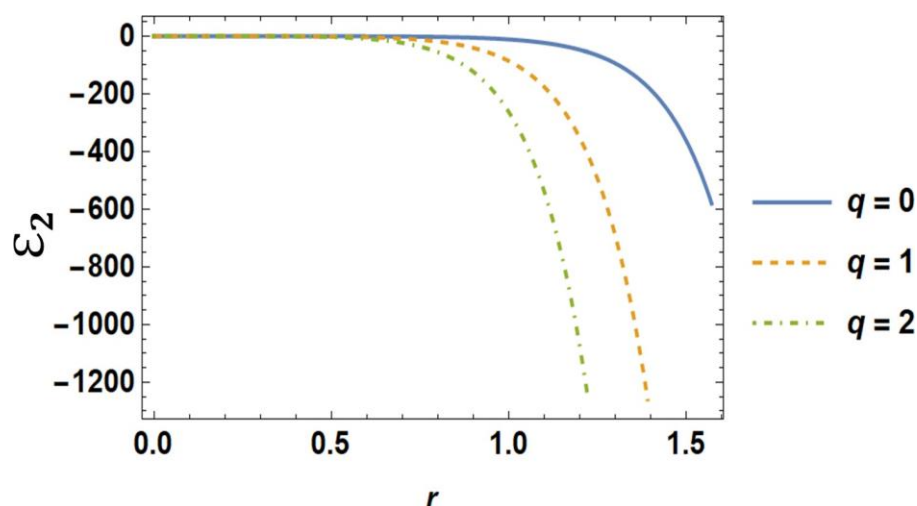


Hình 6. Sự phụ thuộc của thông số đơn rỗi ε_1 vào r đối với trạng thái chồng chất hai mode kết hợp $SU(1, 1)$ khi lần lượt $q = 0, 1, 2$ và $\varphi = 0$.

Đồ thị hình 6 biểu diễn sự phụ thuộc của mức độ đơn rỗi ε_1 vào r của trạng thái chồng chất hai mode kết hợp $SU(1, 1)$ và đồ thị hình 7 biểu diễn sự phụ thuộc của mức độ đơn rỗi ε_2 vào r của trạng thái chồng chất hai mode kết hợp $SU(1, 1)$. Kết quả cho thấy trạng thái bị rỗi với trường hợp khi $m = n = 2k + 1$ với $k = 1$ và không rỗi $m = n = 2k + 1$ với $k = 0$. Đối với trường hợp trạng thái bị rỗi, ta thấy khi r càng tăng thì mức độ đơn rỗi càng mạnh, bằng chứng là các đường đồ thị có độ dốc mạnh về phía phần âm của trục ε_2 . Theo tiêu chuẩn đơn rỗi Hillery-Zubairy thì trạng thái này có thể làm nguồn rỗi cho quá trình viễn tải lượng tử.

4. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, chúng tôi đã khảo sát các tính chất phi cổ điển của trạng thái chồng chất hai mode kết hợp $SU(1, 1)$. Kết quả cho thấy trạng thái chồng chất hai mode kết hợp



Hình 7. Sự phụ thuộc của thông số đơn rỗi ε_2 vào r đối với trạng thái chồng chất hai mode kết hợp $SU(1, 1)$ khi lần lượt $q = 0, 1, 2$ và $\varphi = 0$.

$SU(1, 1)$ không thể hiện tính chất nén hiệu hai mode. Tuy nhiên, trạng thái này lại thể hiện tính chất nén tổng hai mode, tính chất phản kết chùm hai mode và tính đơn rỗi. Đối với tính chất nén tổng hai mode thì trạng thái sẽ thể hiện tính chất này càng mạnh khi q càng tăng. Vị trí mà trạng thái bắt đầu thể hiện tính chất nén tổng cũng có sự khác biệt khi thay đổi tham số φ . Đối với tính chất phản kết chùm thì trạng thái chỉ thể hiện tính chất trên đối với các giá trị q thích hợp, khi giá trị q càng nhỏ thì trạng thái thể hiện tính chất phản kết chùm càng mạnh. Ngoài ra, tính chất này thể hiện mạnh hay yếu tùy thuộc vào giá trị của tham số r . Khi r càng tăng thì tính chất này thể hiện càng yếu. Tiếp theo, chúng tôi đã khảo sát tính đơn rỗi của trạng thái chồng chất hai mode kết hợp $SU(1, 1)$. Trạng thái thể hiện tính đơn rỗi khi xét đến các giá trị k phù hợp. Mức độ thể hiện mạnh hay yếu cũng phụ thuộc vào các tham số khác như r và q . Khi các tham số r hoặc q càng tăng thì mức độ thể hiện tính đơn rỗi càng mạnh. Từ kết quả trên, ta có thể kết luận rằng trạng thái chồng chất hai mode kết hợp $SU(1, 1)$ là một trạng thái phi cổ điển và các tính chất thể hiện tương đối rõ ràng, từ đó mở ra nhiều hướng nghiên cứu mới về trạng thái này trong tương lai.

Lời cảm ơn: Nghiên cứu này được tài trợ bởi Trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế thông qua đề tài khoa học và công nghệ cấp Trường, mã số T.25.TN.103.04.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- Abouelkhir, N.-E., Slaoui, A., Saidi, E. H., Laamara, R., & Hadfi, H. E. (2025). Enhancing phase sensitivity in a Mach-Zehnder interferometer with various detection schemes using $SU(1,1)$ coherent states. *Journal of the Optical Society of America B*, 42(3), 495–502.
- Brif, C., Vourdas, A., & Mann, A. (1996). Analytic representations based on $SU(1,1)$ coherent states and their applications. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 29(18), 5873–5888.
- Carmichael, H. J., & Walls, D. F. (1976). A quantum-mechanical master equation treatment of the dynamical Stark effect. *Journal of Physics B: Atomic and Molecular Physics*, 9(8), 1199–1211.
- Gerry, C. C., & Grobe, R. (1997). Two-mode $SU(2)$ and $SU(1,1)$ Schrödinger cat states. *Journal of Modern Optics*, 44(1), 41–52.
- Glauber, R. J. (1963). Coherent and incoherent states of the radiation field. *Physical Review*, 131, 2766.
- Hillery, M. (1989). Sum and difference squeezing of the electromagnetic field. *Physical Review A*, 40(6), 3147–3155.
- Hillery, M., & Zubairy, M. S. (2006). Entanglement conditions for two-mode states. *Physical Review Letters*, 96(5), 050503.
- Kimble, H. J., Dagenais, M., & Mandel, L. (1977). Photon antibunching in resonance fluorescence. *Physical Review Letters*, 39(11), 691–695.
- Kimble, H. J., & Mandel, L. (1976). Theory of resonance fluorescence. *Physical Review A*, 13(6), 2123–2138.
- Lee, C. T. (1990). Many-photon antibunching in generalized pair coherent states. *Physical Review A*, 41(3), 1569–1575.
- Nguyễn, N. L., Trương, M. Đ., & Trần, Q. Đ. (2018). Các tính chất phi cổ điển của trạng thái hai mode kết hợp thêm hai photon tích $SU(1,1)$. *Tạp chí Khoa học Trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế*, 1(45), 57–64.
- Nguyễn, T. T. H., Trương, M. Đ., & Hồ, S. C. (2019). Định lượng độ rỗi và viễn tải lượng tử với trạng thái hai mode kết hợp $SU(1,1)$ thêm một và bớt một photon lẻ. *Tạp chí Khoa học Trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế*, 3(51), 73–80.

- Perelomov, A. M. (1972). Coherent states for arbitrary Lie group. *Communications in Mathematical Physics*, 26(3), 222–236.
- Rodrigo, D. A., Miguel, B., Valtierra, I. F., & Andrei, B. K. (2025). A comparative analysis of a nonlinear phase space evolution of SU(2) and SU(1,1) coherent states. *Quantum Reports*, 7(3), 31.
- Vourdas, A. (1990). SU(2) and SU(1,1) phase states. *Physical Review A*, 41(3), 1653–1662.
- Wodkiewicz, K., & Eberly, J. H. (1985). Coherent states, squeezed fluctuations and the SU(2) and SU(1,1) groups in quantum-optics applications. *Journal of the Optical Society of America B*, 2(3), 458–466.
- Zarei, F., Jafarizadeh, M., & Barzegar, H. (2021). Effect of thermal noise on the nonclassicality of SU(1,1) and SU(2) coherent states. *The European Physical Journal Plus*, 136, 444.

The nonclassical properties of the superposition of two-mode coherent state $SU(1, 1)$

Cao Thi My Hao, Nguyen Ngoc Bao Nguyen, Do Chinh Hap, Truong Minh Duc

Faculty of Physics, University of Education, Hue University

ARTICLE INFO

Article history:

Received: 14 October 2025

Received in revised from: 01 December 2025

Accepted: 02 December 2025

Published: 20 February 2026

Keywords:

Two-mode sum squeezing;

Two-mode difference squeezing;

Entanglement prop-erties;

Nonclassical properties of the superposition of two-mode coherent state $SU(1, 1)$.

Corresponding author:

Cao Thi My Hao

E-mail addresses:

ctmh26012003@gmail.com

ABSTRACT

In this paper, we investigate the nonclassical properties of the superposition of two-mode coherent state $SU(1, 1)$, including two-mode sum squeezing, two-mode difference squeezing, two-mode antibunching, and entanglement. The results show that the superposition of two-mode coherent state $SU(1, 1)$ exhibits two-mode sum squeezing, two-mode antibunching, and entanglement properties, but does not exhibit two-mode difference squeezing. The degree to which these properties are manifested depends on the system parameters. Thus, the superposition of two-mode coherent state $SU(1, 1)$ is the nonclassical state and its nonclassical properties are well demonstrated.