JOURNAL OF SCIENCE AND EDUCATION, VOLUME 65, ISSUE 1 (2025) 89-98

TẠP CHÍ KHOA HỌC VÀ GIÁO DỤC
ISSN: 1859-1612
Journal homepage: https://tckhgd.dhsphue.edu.vn

Tư duy máy tính và tư duy toán học của học sinh trung học phổ thông qua các bài toán tối ưu rời rạc

Nguyễn Ngọc Thanh, Tạ Thị Minh Phương

Trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế

THÔNG TIN BÀI BÁO

Quá trình xử lý:
Ngày nhận bài: 12/3/2025
Ngày nhận bản chỉnh sửa: 08/4/2025
Ngày nhận đăng: 16/4/2025
Ngày xuất bản: 20/8/2025

Từ khóa:
Tư duy máy tính
Tư duy toán học
Bài toán tối ưu rời rạc

TÓM TẮT

Khoa học máy tính phát triển nhanh chóng và nổi bật, đóng vai trò trung tâm đối với những tiến bộ công nghệ. Vì vậy, gần đây chương trình giáo dục phổ thông của nhiều nước đã chú trọng việc tích hợp các yếu tố của khoa học máy tính như thuật toán, tư duy máy tính, lập trình vào các môn học, đặc biệt là môn toán. Nghiên cứu đã làm rõ đặc trưng của tư duy máy tính và tư duy toán học của học sinh qua bài toán tối ưu rời rạc, trình bày TDTH, điểm chung giữa TDMT và TDTH của học sinh phổ thông.

1. MỞ ĐẦU

Không chỉ là công cụ hỗ trợ trong quá trình giảng dạy và học tập, công nghệ số và tư duy máy tính (TDMT) hiện được xem như một dạng kiến thức khoa học cơ bản cần được cập nhật và thúc đẩy (Wing, 2006). Khung lý thuyết của chương trình đánh giá học sinh quốc tế PISA năm 2021 lập luận rằng kiến thức toán học trong thế kỷ XXI bao gồm khả năng suy luận toán học và một số khía cạnh của TDMT (OECD, 2018). Vì vậy, gần đây, chương trình giáo dục phổ thông của nhiều nước đã chú trọng việc tích hợp các yếu tố của khoa học máy tính như thuật toán, TDMT, lập trình vào các môn học, đặc biệt là môn Toán (Bocconi và cộng sự, 2016). Theo báo cáo về tích hợp TDMT vào chương trình giáo dục phổ thông của Ủy ban châu Âu (Bocconi và cộng sự, 2022), có nhiều mức độ tích hợp TDMT vào chương trình giáo dục phổ thông như áp dụng trên toàn quốc, hoặc tùy thuộc vào mỗi vùng, mỗi trường. Cách thức tích hợp TDMT vào chương trình giáo dục phổ thông của mỗi quốc gia rất đa dạng nhưng có thể phân loại thành 3 nhóm chính. Một là, TDMT là một phần của môn Tin học (ví dụ ở Áo, Đan Mạch, Ý). Hai là, tích hợp vào trong các môn học khác, trong đó nổi bật nhất là môn Toán (ví dụ ở Pháp, Croatia, Phần Lan, Bồ Đào Nha, Tây Ban Nha, Thụy Điển). Ba là, tích hợp thông qua chương trình ngoại khóa (ví dụ ở Phần Lan).

Dựa trên nghiên cứu trước đây về phát triển TDMT của học sinh thông qua hoạt động giải quyết vấn đề không dây (Tran & Nguyen, 2023), sự cần thiết và khả năng phát triển kỹ năng TDMT của học sinh thông qua phương pháp giải quyết vấn đề không dây trong bối cảnh giáo dục toán học tại Việt Nam đã được nhấn mạnh. Trong đó, hoạt động giải quyết vấn đề không dây là các hoạt động nhằm phát triển TDMT nhưng không cần máy tính, mà chỉ cần giấy, bút (Kotsopoulos, 2017). Chưa có nghiên cứu nào được công bố trong nước về vấn đề tích hợp TDMT vào chương trình giáo dục phổ thông môn Toán.

Mặt khác, toán học và khoa học máy tính là hai ngành có mối quan hệ mật thiết với nhau. Những đối tượng toán học như đồ thị, tổ hợp, lôgic là những khái niệm nền tảng của khoa học máy tính. TDMT và tư duy toán học (TDTH) có mối liên hệ mật thiết với nhau, đặc biệt là khi được áp dụng vào quá trình giải quyết vấn đề (Whitney-Smith, 2023). Rambally (2016) cho rằng TDTH đóng góp vào quá trình giải quyết vấn đề và hình thành khái niệm về TDMT, ngược lại, TDMT giúp đơn giản hóa, khái quát hóa vấn đề bằng cách xây dựng và biểu diễn các vấn đề dưới dạng toán học.

Tác giả liên hệ: Nguyễn Ngọc Thanh;
Địa chỉ e-mail: nguyenngocthanh@dhsphue.edu.vn
DOI: https://doi.org/10.26459/jse.012.2025

2. KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

2.1. Tư duy máy tính

Khái niệm "tư duy máy tính" được nhắc đến lần đầu tiên bởi Papert (1980), tác giả ngôn ngữ lập trình LOGO. Papert không định nghĩa khái niệm này mà chỉ sử dụng để mô tả cách học sinh nhỏ tuổi học toán qua lập trình. Wing (2006) đã đưa ra một cách tiếp cận mới, nhấn mạnh rằng TDMT là một kỹ năng cơ bản cần thiết cho mọi người, tương tự như đọc, viết và số học. Wing cũng nhấn mạnh rằng TDMT không chỉ đơn thuần là lập trình máy tính mà còn là một kỹ năng tư duy, giúp con người suy nghĩ và giải quyết vấn đề một cách sáng tạo, thay vì chỉ học thuộc lòng. TDMT là cách con người suy nghĩ để giải quyết vấn đề, không phải hướng con người suy nghĩ như máy tính. TMDT góp phần bổ sung và kết nối với TDTH và kỹ thuật. TDMT không chỉ là sản phẩm do con người tạo ra mà còn là công cụ để con người áp dụng vào việc giải quyết những vấn đề trong cuộc sống hàng ngày. Hơn nữa, TDMT dành cho tất cả mọi người, ở mọi nơi, và mở ra nhiều vấn đề khoa học thú vị từ nhiều khía cạnh và chuyên ngành khác nhau.

Từ năm 2008 đến 2014, Wing tiếp tục phát triển khái niệm này. TDMT theo Wing (2014) là các quá trình tư duy bao gồm hình thành, mô tả vấn đề và thể hiện lời giải của vấn đề theo cách mà các tác nhân xử lý thông tin, bao gồm con người hoặc máy tính, có thể thực hiện một cách hiệu quả. Từ định nghĩa này, có thể nhận thấy con người có thể học, rèn luyện TDMT mà không cần đến thiết bị máy tính nào; và TDMT không chỉ giải quyết mà còn hình thành vấn đề.

2.2. Những kỹ năng tư duy máy tính cốt yếu

Có nhiều ý kiến về những kỹ năng TDMT cốt yếu. Theo Viện chương trình, kiểm tra đánh giá và cơ quan báo cáo giáo dục Australia (ACARA, 2022), có sáu kỹ năng TDMT cốt yếu, bao gồm: phân tích (chia vấn đề thành từng phần nhỏ và đơn giản hơn), nhận diện quy luật (phân tích dữ liệu, tìm kiếm các hình mẫu, quy luật để đơn giản hóa dữ liệu), trừu tượng hóa/khái quát hóa (loại bỏ các chi tiết không quan trọng và tập trung vào các dữ liệu quan trọng), mô hình và mô phỏng (thử nghiệm các giải pháp khác nhau để giải quyết vấn đề hoặc lần theo dấu vết của thông tin để giải quyết vấn đề), thuật toán (thiết kế một chuỗi các bước theo thứ tự để giải quyết vấn đề), và đánh giá (xác định tính hiệu quả của lời giải, tổng quát hóa, áp dụng cho vấn đề mới).

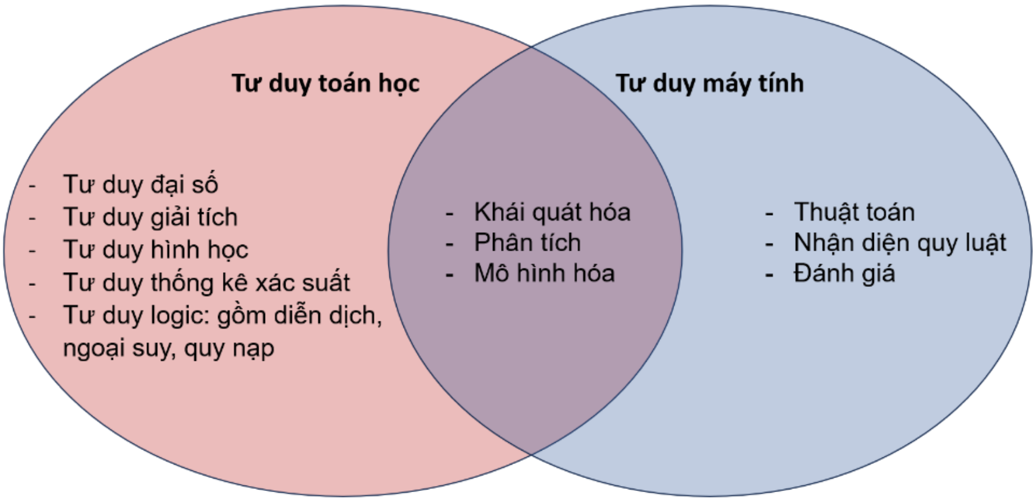
Tiếp cận TDMT trên mang tính thực hành và tập trung vào những kỹ năng cốt lõi. Trong nghiên cứu này, chúng tôi dựa trên sáu kỹ năng TDMT đưa ra bởi ACARA (2022) để thiết kế các tình huống học tập và mô tả đặc trưng TDMT của học sinh vì các yếu tố cốt lõi trong TDMT theo ACARA (2022) tập trung vào bản chất của tư duy, không nhất thiết phải liên quan đến việc sử dụng công nghệ. Do đó, tiếp cận TDMT này có thể dễ dàng được tích hợp vào trong các môn học hay ngữ cảnh khác nhau để phát triển TDMT cho học sinh.

2.3. Tư duy máy tính và tư duy toán học

Có nhiều cách tiếp cận khái niệm “tư duy toán học”. Theo Shute và cộng sự (2017), TDTH gồm có 3 phần: niềm tin về toán học, quá trình giải quyết vấn đề và lý do giải thích cho các giải pháp”. Theo Henderson và cộng sự (2001), TDTH có thể được định nghĩa là sử dụng các kỹ thuật, khái niệm và quy trình toán học, trực tiếp hoặc gián tiếp, để giải quyết vấn đề.

TDMT và TDTH có mối quan hệ tương quan và tương hỗ. TDMT đóng góp cho TDTH thông qua việc TDMT là cốt lõi và thúc đẩy kiến thức, khái niệm và cấu trúc toán học. Ví dụ, Lockwood và De Chenne (2020) đã sử dụng mã hóa để tạo điều kiện thuận lợi cho việc học toán trong tổ hợp. Đối với sự đóng góp của TDTH cho TDMT, toán học là cốt lõi để giải quyết các vấn đề và viết mã lập trình. Ví dụ, học sinh sử dụng các khái niệm toán học, chẳng hạn như số lẻ và số chẵn, để thiết kế chương trình máy tính (Milicic và cộng sự, 2020). Đối với mối quan hệ qua lại giữa TDMT và TDTH, lộ trình học tập có thể được chia thành hai loại: TDMT - TDTH - TDMT và TDTH - TDMT - TDTH. Bằng cách đưa TDMT vào lĩnh vực toán học, TDMT trở thành tư duy chủ đạo trong việc giải quyết vấn đề của học sinh. Ngược lại, TDTH có thể cải thiện hiệu suất sửa lỗi của học sinh, chẳng hạn như bằng cách kiểm tra các câu trả lời sai của họ.

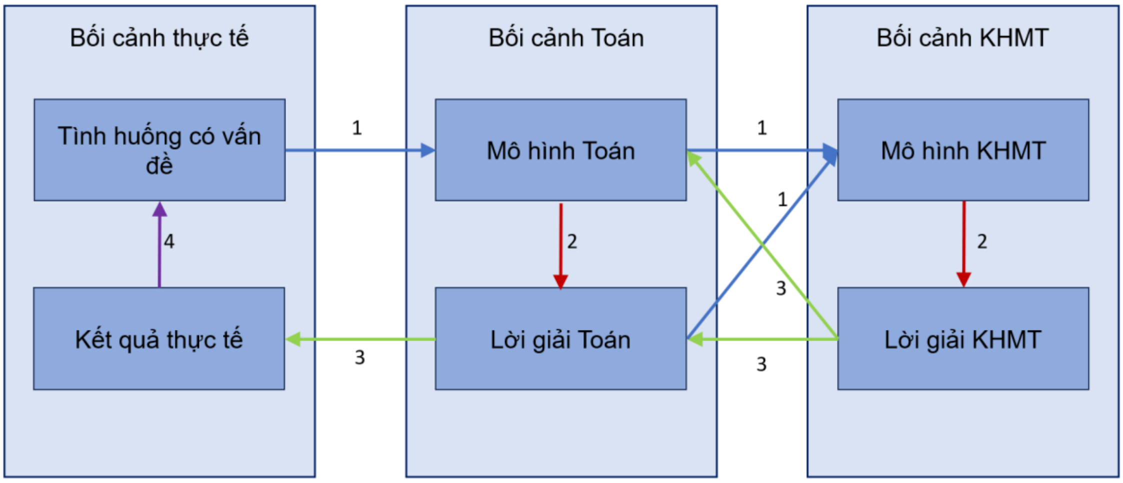
Wu & Yang (2022) đã xem xét 28 bài báo liên quan trên cơ sở dữ liệu Web of Science và nhận ra: (1) TDMT giúp học sinh phát triển và áp dụng các khái niệm, năng lực toán học bằng cách sử dụng phần mềm hoặc lập trình; (2) TDTH giúp học sinh giải các bài toán liên quan đến TDMT, không nhất thiết phải bao gồm cả lập trình; (3) mối quan hệ tương hỗ giữa TDMT và TDTH đưa TDMT vào việc học toán, trong đó TDMT tham gia vào việc giải quyết vấn đề và TDTH được phát triển để cải thiện hiệu suất của học sinh trong việc sửa lỗi hoặc phản ánh. Một số nghiên cứu tiếp tục công nhận khả năng của TDMT trong việc giúp học sinh TDTH và học toán hiệu quả (Kynigos & Grizioti, 2018). Sử dụng các kỹ thuật, khái niệm và quy trình toán học để giải quyết vấn đề là một hình thức TDTH (Henderson và cộng sự, 2001). TDTH góp phần giải quyết vấn đề và hiểu biết khái niệm về TDMT, từ đó TDMT đơn giản hóa và thực hiện trừu tượng hóa bằng cách xây dựng và biểu diễn các vấn đề theo cách toán học (Rambally, 2016).



Hình 1. Biểu đồ Venn mô tả mối liên hệ giữa tư duy máy tính và tư duy toán học theo thành phần.

Tương tác giữa TDMT và TDTH có thể được xem xét dựa trên hai góc độ. Thứ nhất là thành phần của mỗi loại tư duy, những thành phần chung, riêng biệt, được biểu diễn trực quan thông qua biểu đồ Venn ở Hình 1. Thứ hai là quy trình thể hiện sự tương tác giữa hai loại tư duy, được biểu diễn trực quan thông qua sơ đồ ở Hình 2.

Trong sơ đồ ở Hình 2, mũi tên (1) biểu thị quá trình chuyển tình huống thực tế sang mô hình Toán/mô hình khoa học máy tính (KHMT). Kỹ năng tư duy mà học sinh cần thể hiện ở bước này là khái quát hóa và mô hình hóa, là điểm chung giữa hai loại tư duy. Mũi tên (2) biểu thị quá trình lập luận, làm việc trong Toán/KHMT. Nếu làm việc trong mô hình Toán, học sinh cần thể hiện các tư duy về nội dung đặc trưng của TDTH, nếu làm việc trong mô hình KHMT, học sinh cần thể hiện các kỹ năng tư duy đặc trưng của TDMT. Mũi tên (3) biểu thị quá trình chuyển từ lời giải toán/KHMT về ngữ cảnh thực tế. Ở bước này, học sinh cần thể hiện kỹ năng tổng quát hóa. Mũi tên (4) biểu thị quá trình kiểm chứng kết quả thực tế đã giải quyết đã thỏa đáng hay chưa. Ở bước này, học sinh cần thể hiện kỹ năng đánh giá.



Hình 2. Sơ đồ mô tả quy trình tương tác giữa TDMT và TDTH (Kallia và cộng sự, 2021).

TDMT có thể mở rộng quá trình trọng tâm của TDTH bằng cách tái cấu trúc thông qua cách hình thành hoặc giải quyết vấn đề. Quan điểm này đặt toán học vào vị trí làm bối cảnh cho TDMT. Vì vậy, đối tượng toán học (là kết quả của quá trình toán học hóa theo chiều ngang), và hoạt động toán học (thể hiện trong quá trình toán học hóa theo chiều dọc) trở thành điểm xuất phát của TDMT (Kallia và cộng sự, 2021).

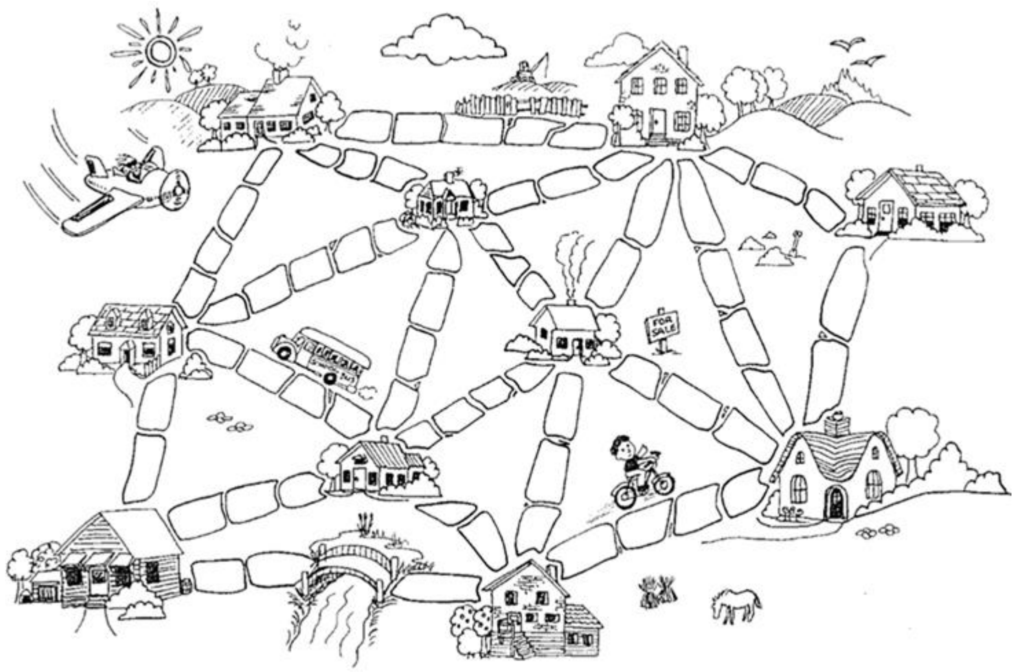
Cả TDMT và TDTH đều tiếp cận tư duy bằng cách sử dụng các khái niệm về nhận thức, siêu nhận thức và thái độ cốt lõi để giải quyết vấn đề. Cả hai đều công nhận và thúc đẩy các cơ hội học tập, nhằm hình thành tư duy, thực hành và phản ánh chúng trong thế giới thực. Tuy nhiên, với tốc độ gia tăng của các tiến bộ về máy tính khiến TDMT được đặt vào vị trí trung tâm hơn. Việc tích hợp TDMT vào giáo dục toán học giúp học sinh làm quen với cách áp dụng, thực hành toán học trong thực tế, nhằm nâng cao việc học nội dung toán học, đồng thời xây dựng năng lực cho người học trong việc tiếp thu và áp dụng kiến thức đã biết vào tình huống mới (Kallia và cộng sự, 2021).

2.4. Công cụ nghiên cứu và phân tích tiên nghiệm

Chúng tôi đã tổ chức thực nghiệm quan sát lớp học gồm 30 học sinh lớp 11 trong năm học 2024-2025 trên địa bàn thành phố Huế dựa trên chuỗi 4 bài toán về tối ưu rời rạc. Các học sinh có 90 phút để giải quyết 4 bài toán bằng hình thức làm việc cá nhân. Sau khi thu thập dữ liệu về bài làm của học sinh, nhà nghiên cứu nhanh chóng phân tích sơ lược và chọn ra 5 bài làm cần được khai thác thêm để thực hiện phỏng vấn 1-1 vào ngày hôm sau. Ở thời điểm thực nghiệm, tất cả các học sinh đều chưa được học chuyên đề về tối ưu rời rạc hay về lý thuyết đồ thị một cách chính thức, nhưng có một số học sinh đã tự học nội dung lý thuyết đồ thị. Với đặc điểm không cần trang bị quá nhiều kiến thức về nội dung toán, thay vào đó đòi hỏi nhiều năng lực tư duy và suy luận, các học sinh trung học phổ thông đều có khả năng giải quyết các bài toán này. Dữ liệu thu được bao gồm bài làm của học sinh, phỏng vấn và những ghi chép khi quan sát quá trình tư duy của học sinh. Chúng tôi phân tích dữ liệu qua việc chỉ ra các biểu hiện kỹ năng TDMT cốt yếu của học sinh. Do phạm vi của bài báo, dưới đây chúng tôi trình bày một bài toán và tập trung mô tả những khía cạnh TDMT của học sinh, thể hiện qua quá trình giải quyết vấn đề này.

Bài toán: Ngày xưa có một thành phố không có đường. Việc đi lại trong thành phố đặc biệt khó khăn sau những trận mưa vì mặt đất trở nên lầy lội, bánh xe bị mắc kẹt trong bùn và người dân bị bẩn ủng. Thị trưởng thành phố quyết định một số đường phố phải được lát đá, nhưng không muốn chi nhiều tiền hơn mức cần thiết vì thành phố đang còn khó khăn. Do đó, thị trưởng đã chỉ định hai điều kiện: Thứ nhất, đường phải được lát đá đủ để mọi người chỉ có thể đi lại từ nhà mình đến nhà người khác dọc theo đường được lát đá. Thứ hai, việc lát đá phải tốn ít chi phí nhất có thể.

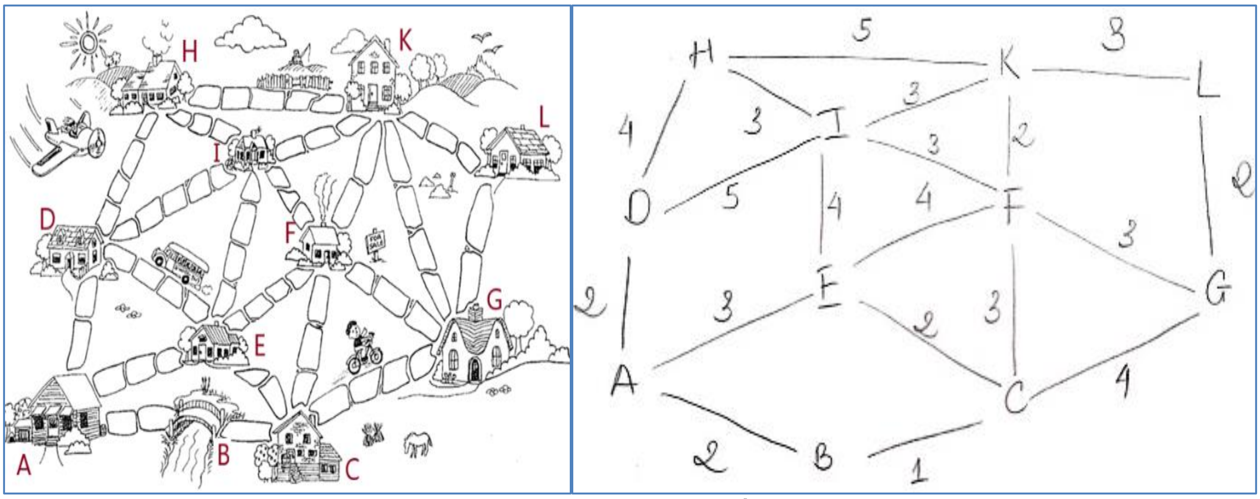
Hình vẽ dưới đây mô tả cách bố trí của thành phố. Số lượng đá lát giữa mỗi ngôi nhà tỉ lệ thuận với chi phí lát đường đó. Tìm tuyến đường tốt nhất kết nối tất cả các ngôi nhà nhưng sử dụng càng ít đá càng tốt. Em sử dụng những cách làm nào để giải quyết vấn đề trên?



Bài toán được chúng tôi tham khảo từ sách Computer Science Unplugged (Bell và cộng sự, 1998). Bài toán được đưa ra với mục đích cho học sinh rèn luyện các kỹ năng TDMT là trừu tượng hóa, mô hình hóa và mô phỏng, thuật toán và đánh giá. Bài toán là một ví dụ của bài toán cây khung nhỏ nhất, có trọng số. Các cách giải dự kiến cho bài toán này như sau:

Cách 1: (Sử dụng thuật toán Kruskal) Ta có thể xem 1 viên đá như 1 đơn vị độ dài và cần tìm đường đi ngắn nhất để nối tất cả các địa điểm trong hình. Trong hình vẽ có 11 địa điểm, theo bài toán cây khung nhỏ nhất cơ bản (không trọng số), cần ít nhất 10 đường để nối 11 địa điểm. Với hai địa điểm bất kỳ, nếu ta chọn đường ngắn nhất để nối hai địa điểm này, ta sẽ thu được cách nối 11 địa điểm này một cách ngắn nhất. Ta ưu tiên các đường có độ dài ngắn nhất trước tiên, sao cho nếu nối đường đó, không tạo thành một vòng khép kín. Ta ký hiệu các đỉnh (A, B,..., K, L) tương ứng với các ngôi nhà như hình 3. Đường ngắn nhất trong hình vẽ có độ dài là 1 (đơn vị), nối B và C, ta sẽ tô màu đường này. Đường có độ dài ngắn nhất tiếp theo là 2 (đơn vị), gồm các đường nối A và B, A và D, C và E, F và K, G và L. Nếu nối 5 đường này thì vẫn không tạo thành vòng khép kín nào, nên ta tô màu 5 đường. Lúc này, ta đã tô màu 6 đường, cần tô màu thêm 4 đường nữa.

Đường có độ dài ngắn nhất tiếp theo là 3 (đơn vị), gồm các đường nối A và E, C và F, F và G, F và I, H và I, I và K, K và L. Ta lần lượt kiểm tra, không chọn A-E, chọn C-F, chọn F-G, không chọn F-I, chọn H-I, không chọn I-K, không chọn K-L (vì sẽ tạo thành vòng khép kín). Vậy, ta đã chọn ra tuyến đường ngắn nhất (gồm 10 đường) nối tất cả các địa điểm của thành phố.



Hình 3. Mô hình hóa thành đồ thị tương ứng.

Cách 2: (Sử dụng thuật toán Prim) Chọn một thành phố làm mốc, sau đó tìm cách kết nối với một thành phố khác sao cho tuyến đường đến thành phố đó là ngắn nhất. Lặp lại quá trình trên, tìm đường nối một địa điểm đã được kết nối, nối đến một địa điểm đang còn nằm cô lập sao cho đường đó là ngắn nhất. Ký hiệu các đỉnh như cách 1. Ta có thể lập bảng để thực hiện quá trình trên một cách hiệu quả hơn.

Bảng 1. Áp dụng thuật toán Prim.

Bước	Đỉnh đã được kết nối	Đỉnh đang còn nằm cô lập	Đường ngắn nhất
1	A	B, C, D, E, F, G, H, I, K, L	AB = 2
2	A, B	C, D, E, F, G, H, I, K, L	BC = 1
3	A, B, C	D, E, F, G, H, I, K, L	AD = 2
4	A, B, C, D	E, F, G, H, I, K, L	CE = 2
5	A, B, C, D, E	F, G, H, I, K, L	CF = 3
6	A, B, C, D, E, F	G, H, I, K, L	FK = 2
7	A, B, C, D , E, F, K	G, H, I, L	FG = 2
8	A, B, C, D, E, F, K, G	H, I, L	GL = 2
9	A, B, C, D, E, F, K, G, L	H, I	GI = 3
10	A, B, C, D, E, F, K, G, L, I	H	HI = 3
11	A, B, C, D, E, F, K, G, L, I, H		

2.5. Kết quả quan sát lớp học

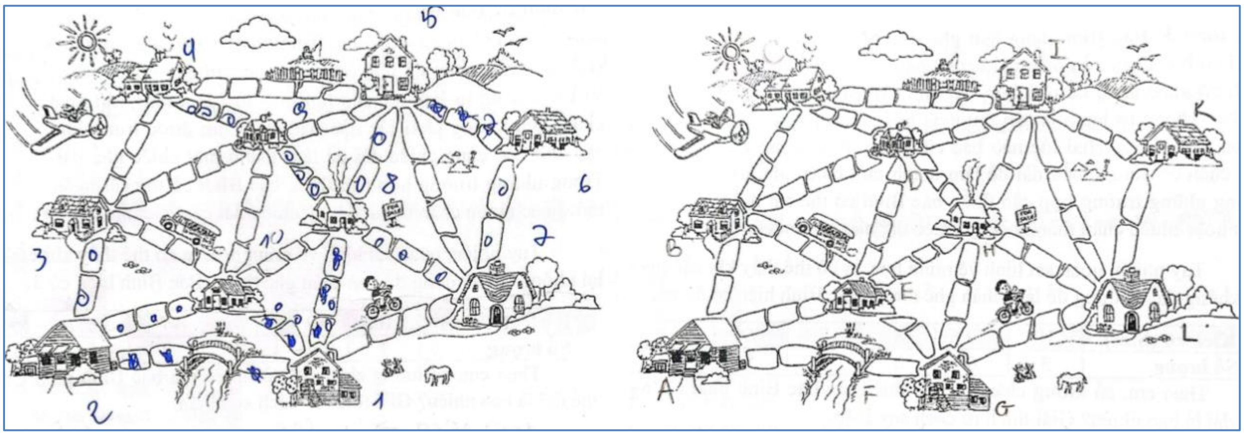
Trong phạm vi của bài báo này, chúng tôi sẽ tập trung mô tả những khía cạnh TDMT và TDTH của học sinh được thể hiện qua quá trình giải quyết vấn đề này.

2.5.1. Tương tác giữa tư duy máy tính và tư duy toán học của học sinh

Trừu tượng hóa: Tổng hợp từ bài làm của các học sinh, chúng tôi phân loại được hai biểu hiện liên quan đến khả năng trừu tượng hoá của học sinh đối với bài toán này như sau:

Ghi chú thông tin quan trọng: học sinh nhấn mạnh những thông tin cần thiết bằng cách gạch chân, tô màu các từ khóa quan trọng của đề bài; quan tâm đến đồ thị và rút ra được các nhận xét từ đồ thị. Trong bài toán này, các ngôi nhà không có tên gọi, nếu không sử dụng các ký hiệu thì rất khó để phân biệt các ngôi nhà với nhau. Chính vì vậy, có nhiều học sinh đã sử dụng các loại ký hiệu để gọi tên các đỉnh. Ví dụ, HS26 sử dụng số 0,1,...10; hay HS2 sử dụng ký hiệu A,B,...,K,L để ký hiệu các đỉnh.

Minh hoạ trực quan một phương án giải: Khả năng trừu tượng hóa của học sinh còn thể hiện qua việc mô tả trực quan được một phương án giải quyết vấn đề. Ví dụ, HS26 đã minh họa trực quan một phương án giải quyết ngay trên hình vẽ đề bài cung cấp. Học sinh này đã đánh dấu (tô tròn vào các viên đá) các con đường sẽ được lát gạch.



Hình 4. Bài làm của HS26 (trái) và HS2 (phải).

Mô hình hóa và mô phỏng: Khả năng mô hình hóa và mô phỏng được thể hiện qua việc học sinh hình dung, sử dụng, hoặc thiết lập được một sơ đồ (đồ thị) và các yếu tố liên quan như đỉnh, cạnh, độ dài cạnh. Ví dụ, khi trả lời phỏng vấn, HS11 đã trình bày như sau khi được yêu cầu giải thích về lời giải đưa ra cho bài toán:

HS11*:"Em xem các ngôi nhà này giống các đỉnh. Các con đường nối các ngôi nhà này là các cạnh, với độ dài khác nhau, tương ứng với số đá cần lát. Yêu cầu của bài toán trở thành tìm tổng độ dài các cạnh sao cho các đỉnh đều được nối với nhau, và số đá cần lát là ít nhất. Để làm được điều này, ta sẽ chọn lát đá các con đường sao cho các con đường được lát đá không tạo với nhau thành một vòng kín, và ưu tiên các con đường có độ dài nhỏ nhất..."*

Nếu làm việc trong ngữ cảnh KHMT, với nền tảng là lý thuyết đồ thị, học sinh sẽ xây dựng được mô hình gồm các đối tượng như đỉnh, cạnh, mối quan hệ giữa các đối tượng, ... Nếu làm việc trong ngữ cảnh toán học, không sử dụng kiến thức về lý thuyết đồ thị, học sinh vẫn có thể giải quyết vấn đề bằng việc xem các đỉnh, cạnh như các đối tượng hình học thông thường, và sử dụng các lập luận toán học (trình bày ở phần thuật toán dưới đây).

2.5.2. Đặc trưng của tư duy toán học của học sinh

Tư duy logic: Một khía cạnh của tư duy logic được thể hiện qua việc giải quyết bài toán này là sử dụng suy luận quy nạp. Ví dụ, HS25 khi được phỏng vấn, đã thể hiện suy luận quy nạp để nhận ra tính chất để kết nối n+1 địa điểm, cần ít nhất n đường đi.

HS25 lập luận: *"Để nối 2 địa điểm cần ít nhất 1 đường. Để nối 3 địa địa điểm cần ít nhất 2 đường... Tương tự, em đưa ra kết luận để kết nối n+1 địa điểm, thì cần ít nhất n đường."*

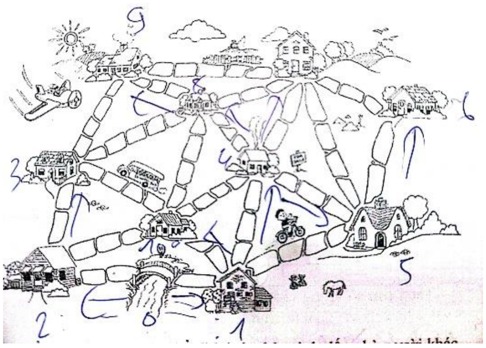
Từ phán đoán được đưa ra nhờ suy luận quy nạp, HS sử dụng suy luận diễn dịch, để chứng minh phán đoán đó chính xác.

HS25 lập luận: *"Em sẽ chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học mệnh đề "để kết nối n+1 đỉnh, thì cần ít nhất n đoạn thẳng". Mệnh đề đúng với n=1. Giả sử mệnh đề đúng với n=k, tức là ta đã có hình vẽ gồm k+1 đỉnh, và cần ít nhất k đoạn thẳng để nối các đỉnh với nhau. Tại hình vẽ trên, ta lấy một đỉnh khác, không trùng với k+1 đỉnh còn lại, hình vẽ lúc này có k+2 đỉnh. Khi đó cần ít nhất 1 đoạn thẳng để nối đỉnh này với một trong k+1 đỉnh còn lại, nên cần k+1 đoạn thẳng."*

Phương pháp chứng minh quy nạp toán học, thực chất là thể hiện suy luận diễn dịch, không phải suy luận quy nạp. Trong tình huống này, HS25 đã phần nào thể hiện tư duy logic thông qua suy luận diễn dịch, dù chứng minh quy nạp trên chưa hoàn toàn chính xác. Phần thể hiện của HS25 trên giấy làm bài không thể hiện rõ ràng đặc trưng của tư duy toán học, chỉ đến khi được phỏng vấn, học sinh mới trình bày những suy luận quy nạp và diễn dịch.

2.5.3. Đặc trưng của tư duy máy tính của học sinh

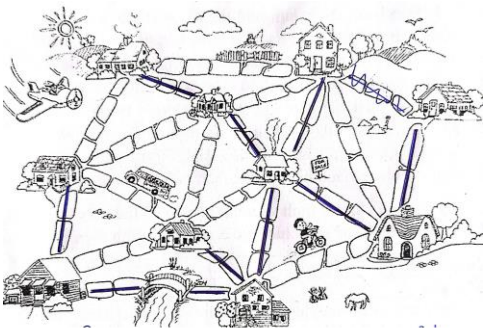
Thuật toán: Để giải bài toán cây khung nhỏ nhất, có hai giải thuật phổ biến là thuật toán Prim và thuật toán Kruskal. Tuy không gọi tên được thuật toán, nhưng bài làm của các học sinh phần nào thể hiện được ý tưởng dựa trên hai thuật toán này. Đặc biệt, nếu lời giải được lấy ý tưởng từ thuật toán Kruskal thì học sinh sẽ gần như thực hiện chính xác từng bước của thuật toán này.



Bắt đầu từ chiếc cầu, sau đó đi theo đường ngắn nhất để đến các nhà còn lại
Đường đi ngắn nhất đến nhà đầu tiên: 1 đ
" thứ hai 2: 2đ
" 3: 2đ
" 4: 3đ
" 5: 3đ
" 6: 2đ
" 7: 2đ
" 8: 3đ
" 9: 3đ
" 10: 2đ
(có đánh số thứ tự trong hình)
Vậy tổng là 23 viên gạch

Hình 5. Bài làm của HS3 (đã được viết lại nguyên văn bởi tác giả).

Ví dụ, HS3 đã lập luận rằng sẽ chọn một địa điểm làm mốc, sau đó chọn con đường có ít gạch nhất đến lần lượt những ngôi nhà còn lại (xem Hình 5). Hay HS6 đã lập luận rằng sẽ chọn một ngôi nhà làm mốc, chọn đường có ít gạch nhất và không tạo thành một vòng khép kín qua mỗi nhà. Những cách làm này được lấy ý tưởng từ thuật toán Prim, tuy nhiên đây không phải là một lời giải áp dụng chính xác thuật toán Prim.



Số lượng đá tối thiểu cần lát: 23 viên
Cách làm
- Chọn các tuyến đường có số đá nhỏ đến lớn
- Nối các tuyến đường sao cho các tuyến đường
o tạo thành vòng kín.

Hình 6. Bài làm của HS14 (đã được viết lại nguyên văn bởi tác giả).

Hoặc HS14 đã nêu ý tưởng chọn các tuyến đường có số đá từ nhỏ đến lớn, nối các tuyến đường sao cho không tạo thành vòng kín. HS14 khi được yêu cầu giải thích cụ thể hơn ở phần phỏng vấn, đã giải thích tuần tự các cách chọn đường đúng theo thuật toán Kruskal. Hay HS25 đã nhận ra rằng cần ít nhất 10 con đường, sau đó sắp xếp các con đường theo số đá từ nhỏ đến lớn (có 1 đường có độ dài 1, có 5 đường có độ dài 2, cần 4 đường có độ dài 3), tuy nhiên, thay vì lập luận để chứng minh phương án đó khả thi và tối ưu, HS25 lại cho rằng "may mắn" phương án trên đã đi qua đủ tất cả các nhà (xem Hình 7). Những cách làm này được lấy ý tưởng từ thuật toán Kruskal. Trong đó lời giải trên giấy và giải thích của HS14 là chính xác và hoàn chỉnh hơn (xem Hình 6).

Có 10 nhà và 1 cầu
→ Cần ít nhất 10 bước để đi tất cả các nhà

Đường đi ngắn nhất ta có thể đi: 2.5 + 3.4 + 1 = 23
→ ta phải đi q tất cả các đường 2 và 3 và tất nhiên là 1.
Ta nối lại may mắn đi đủ tất cả các nhà.
→ 23

Hình 7. Bài làm của HS25 (đã được viết lại nguyên văn bởi tác giả).

Bảng 2 thống kê số lượng lượt học sinh sử dụng thuật toán hoặc quy trình tựa thuật toán Kruskal và Prim để giải quyết vấn đề.

Bảng 2. Số lượng lượt học sinh sử dụng thuật toán hoặc quy trình tựa thuật toán Kruskal và Prim.

Mô tả	Số lượng	Tỉ lệ
Sử dụng thuật toán /quy trình tựa thuật toán Kruskal	6	20%
Sử dụng thuật toán /quy trình tựa thuật toán Prim	4	13,33%
Đưa ra đáp án đúng nhưng không thể hiện kỹ năng thuật toán nào	3	10%
Không có câu trả lời/Câu trả lời không chính xác	17	56,67%

Những học sinh sử dụng thuật toán hoặc quy trình tựa thuật toán Prim có xu hướng không xem xét bài toán một cách bao quát, mà tập trung vào từng bộ phận. Ngược lại, những học sinh sử dụng thuật toán hoặc quy trình tựa thuật toán Kruskal thường quan tâm đến những yếu tố bao quát của bài toán như có tất cả bao nhiêu đỉnh, bao nhiêu con đường, rồi phân loại các con đường này theo từng nhóm (trong bài toán này là phân loại theo độ dài).

Đánh giá: Khía cạnh đánh giá thể hiện ở khả năng học sinh lập luận về tính tối ưu của lời giải đưa ra. Không có học sinh nào thể hiện khía cạnh này, dù trong quá trình quan sát học sinh làm bài, chúng tôi có yêu cầu chứng minh phương án học sinh đưa ra là tối ưu. Chỉ đến khi phỏng vấn, một số học sinh mới đưa ra được lập luận cho sự tối ưu này. Sau đây là đoạn hội thoại giữa nhà nghiên cứu và học sinh:

Nhà nghiên cứu: *"Trong bài làm của mình, em đã chọn được phương án kết nối tất cả các địa điểm và cần 23 viên đá. Em nghĩ có phương án nào tối ưu hơn không? Chỉ cần 22 viên đá chẳng hạn."*

HS14 suy nghĩ và trả lời: *"Em nghĩ là không thể có phương án 22 viên đá được. Vì ở đây có 11 địa điểm, nên cần ít nhất 10 con đường để nối 11 địa điểm này với nhau, không thể ít hơn. Và nếu em sắp xếp các con đường theo thứ tự cần ít đá nhất đến cần nhiều đá nhất, sẽ là 1 đường 1 viên, 5 đường 2 viên, 7 đường 3 viên, 5 đường 4 viên, 2 đường 5 viên. Tổng số viên đá của 10 con đường có độ dài ngắn nhất đã là 23, nên không thể xảy ra được hợp có thể dùng 22 viên đá để kết nối được 11 địa điểm."*

3. THẢO LUẬN

Nghiên cứu này đề cập đến tầm quan trọng của TDMT đối với giáo dục toán học phổ thông hiện nay, phân tích các biểu hiện của TDMT, TDTH và khả năng phát triển TDMT cho học sinh trung học thông qua bài toán về chủ đề tối ưu rời rạc. Dựa trên những kết quả quan sát lớp học ban đầu, chúng tôi nhận thấy tính khả thi của việc tích hợp TDMT thông qua các bài toán tối ưu rời rạc, giúp dẫn dắt học sinh bước đầu hiểu được các yếu tố nền tảng của KHMT, từ đó thúc đẩy TDMT cho học sinh phổ thông. Hơn nữa, TDMT và TDTH có mối liên hệ chặt chẽ. Việc tích hợp TDMT vào trong giáo dục toán học không chỉ giúp học sinh làm quen với việc áp dụng và thực hành toán học trong thực tế, mà còn hỗ trợ quá trình học tập các khái niệm toán học. Đồng thời, điều này còn giúp học sinh tiếp thu và vận dụng kiến thức đã học vào các tình huống mới (Kallia và cộng sự, 2021).

Với sự phát triển vượt bật của KHMT, các kỹ năng TDMT trở thành những kỹ năng cốt yếu của thế kỷ XXI. Vì vậy, nhiều nước đã có những sửa đổi hoặc cải cách theo hướng bắt buộc tích hợp các yếu tố thuật toán và TDMT vào giáo dục phổ thông. Chương trình giáo dục phổ thông môn toán năm 2018 của Việt Nam không đề cập tường minh và chính thức đến việc tích hợp các yếu tố thuật toán và TDMT vào dạy học toán. Tuy nhiên, chúng tôi nhận thấy rằng TDMT và TDTH có mối liên hệ chặt chẽ, và chủ đề tối ưu rời rạc, kết hợp với lý thuyết đồ thị trong chương trình là phần nội dung chứa đựng nhiều tiềm năng để phát triển TDMT cho học sinh. Mặc dù chương trình giáo dục phổ thông môn toán không chính thức đề cập đến việc tích hợp các yếu tố thuật toán và TDMT, các vấn đề này đã được thúc đẩy trong thực tế dạy học toán ở tiểu học và trung học ở nước ta, chẳng hạn thông qua cuộc thi Thách thức thuật toán hằng năm, hay các xu hướng dạy lập trình cho học sinh hiện nay.

4. KẾT LUẬN

Nghiên cứu này là một tiếp nối của nghiên cứu trước đây về phát triển TDMT của học sinh thông qua hoạt động không dây (Tran & Nguyen, 2023). Trong nghiên cứu này, chúng tôi làm rõ đặc trưng TDMT của học sinh qua bài toán về chủ đề tối ưu rời rạc. Hơn nữa, một đóng góp mới trong nghiên cứu này là việc trình bày TDTH, điểm chung giữa TDMT và TDTH của học sinh phổ thông, điều mà các nghiên cứu trước chưa đề cập. Đây là những nghiên cứu mở đầu ở Việt Nam, góp phần khẳng định sự cần thiết và tính khả thi của việc phát triển TDMT cho học sinh trong giáo dục phổ thông, đặc biệt là giáo dục toán học, nhằm thúc đẩy toán học tính toán.

Lời cám ơn: Chúng tôi muốn bày tỏ sự biết ơn đến PGS.TS. Trần Kiêm Minh đã hướng dẫn và động viên trong suốt quá trình thực hiện nghiên cứu. Nghiên cứu này được tài trợ bởi Trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế trong đề tài mã số T.24.XH.503.11.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

ACARA. (2022). *Computer thinking in practice.* https://www.australiancurriculum.edu.au (10 February 2023)

Bell, T., Witten, I. H., & Fellows, M. (1998). *Computer science unplugged: Off-line activities and games for all ages.* Computer Science Unplugged.

Bocconi, S., Chioccariello, A., Dettori, G., Ferrari, A., & Engelhardt, K. (2016). *Developing computational thinking in compulsory education – Implications for policy and practice. JRC Science for Policy Report.* https://doi.org/10.2791/792158

Bocconi, S., Chioccariello, A., Kampylis, P., Dagienė, V., Wastiau, P., Engelhardt, K., Earp, J., Horvath, M. A., Jasutė, E., Malagoli, C., Masiulionytė-Dagienė, V., & Stupurienė, G. (2022). *Reviewing computational thinking in compulsory education.* Publications Office of the European Union. ISBN 978-92-76-47208-7. DOI:10.2760/126955, JRC128347.

Henderson, P. B., Baldwin, D., Dasigi, V., Dupras, M., Ginat, D., Goelman, D., Hamer, J., Hitchner, L., Lloyd, W., Marion, B., Riedesel, C., & Walker, H. (2001). *Striving for mathematical thinking. ACM SIGCSE Bulletin, 33*(4), 114–124. DOI: 10.1145/572139.572180.

Kallia, M., van Borkulo, S., Drijvers, P., Barendsen, E., & Tolboom, J. (2021). *Characterising computational thinking in mathematics education: A literature-informed Delphi study. Research in Mathematics Education.* 10.1080/14794802.2020.1852104.

Kotsopoulos, D., Floyd, L., Khan, S., Namukasa, I. K., Somanath, S., Weber, J., & Yiu, C. (2017). *A pedagogical framework for computational thinking. Digital Experiences in Mathematics Education, 3*(2), 154–171.

Kynigos, C., & Grizioti, M. (2018). *Programming approaches to computational thinking: Integrating turtle geometry, dynamic manipulation and 3D space. Informatics in Education, 17*(2), 321–340. DOI: 10.15388/infedu.2018.17

Lockwood, E., & De Chenne, A. (2020). *Enriching students' combinatorial reasoning through the use of loops and conditional statements in Python. International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 6.* 10.1007/s40753-019-00108-2.

Organisation for Economic Cooperation and Development (OECD). (2018). *PISA 2021 mathematics framework (draft).* Paris: The author. https://www.oecd.org/pisa/sitedocument/PISA-2021-mathematics-framework.pdf

Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, computers, and powerful ideas.* Basic Books.

Rambally, G. (2016). *The synergism of mathematical thinking and computational thinking.* In D. Polly (Ed.), *Cases on technology integration in mathematics education* (pp. 416–437). Business Science Reference.

Shute, V., Sun, C., & Asbell-Clarke, J. (2017). *Demystifying computational thinking. Educational Research Review, 22,* 142–158. DOI: 10.1016/j.edurev.2017.09.003.

Tran, K. M., & Nguyen Thirteenth, N. T. (2023). *Developing computational thinking: An unplugged problem-solving approach. Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (pp. 3063–3070). Alfréd Rényi Institute of Mathematics; Eötvös Loránd University of Budapest, Budapest, Hungary. hal-04420633.

Wing, J. M. (2006). *Computational thinking. Communications of the ACM, 49*(3).

Wing, J. (2014). *Computational thinking benefits society. 40th Anniversary Blog of Social Issues in Computing.*

Whitney-Smith, R. M. (2023). *The emergence of computational thinking in national mathematics curricula: An Australian example. Journal of Pedagogical Research, 7*(2), 41–55.

Wu, W. R., & Yang, K. L. (2022). *The relationships between computational and mathematical thinking: A review study on tasks. Cogent Education, 9*(1), 2098929.

Computational thinking and mathematical thinking of high school students through discrete optimization problems

Nguyen Ngoc Thanh, Ta Thi Minh Phuong

University of Education, Hue University

ARTICLE INFO

Article history:
Received 12 March 2025
Received in revised form 08 April 2025
Accepted 16 April 2025
Published 20 August 2025

Keywords:
computational thinking
mathematical thinking
discrete optimization problem

Corresponding author:
Nguyen Ngoc Thanh
E-mail address:
nguyenngocthanh@dhsphue.edu.vn

ABSTRACT

Computer science has experienced rapid and significant advancements, playing a central role in technological progress. Consequently, in recent years, many countries have emphasized the integration of computer science elements, such as algorithms, computational thinking, and programming, into various subjects, particularly mathematics, in their general education curricula. This study has clarified the characteristics of computational thinking and mathematical thinking of students through discrete optimization problems, presented computational thinking, and common part between computational thinking and mathematical thinking of high school students.