

**Nghiên cứu các tính chất phi cổ điển của trạng thái dịch chuyển Fock đơn mode****Đỗ Chính Hạp, Trương Minh Đức***Khoa Vật lý, Trường Đại học Sư Phạm, Đại học Huế*

## THÔNG TIN BÀI BÁO

*Quá trình xử lý:**Ngày nhận bài: 22/7/2025**Ngày nhận bản chỉnh sửa: 03/10/2025**Ngày nhận đăng: 06/10/2025**Ngày xuất bản: 20/10/2025**Từ khóa:**Nén Hillery**Nén Hong-Mandel**Thống kê sub-Poisson**Trạng thái dịch chuyển Fock đơn mode*

## TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu các tính chất phi cổ điển của trạng thái dịch chuyển Fock đơn mode, đó là tính chất nén Hillery, tính chất nén Hong-Mandel, và tính thống kê sub-Poisson bậc thấp và bậc cao. Kết quả khảo sát cho thấy trạng thái dịch chuyển Fock đơn mode không thể hiện tính chất nén Hillery bậc thấp và bậc cao nhưng lại thể hiện tính chất nén Hong-Mandel bậc cao. Hơn nữa, trạng thái này thể hiện tính chất thống kê sub-Poisson cả ở bậc thấp và bậc cao tương ứng với số hạt trong trạng thái Fock  $n \geq 1$ . Như vậy, trạng thái dịch chuyển Fock đơn mode là một trạng thái phi cổ điển và các tính chất phi cổ điển của chúng được thể hiện tương đối rõ ràng.

**1. GIỚI THIỆU**

Hiện nay trên thế giới, lĩnh vực thông tin lượng tử đang đẩy mạnh các hướng nghiên cứu liên quan đến các trạng thái phi cổ điển. Việc nghiên cứu và ứng dụng các trạng thái phi cổ điển đã và đang đóng vai trò rất quan trọng đối với khoa học kỹ thuật ngày nay. Ba nhà khoa học Aspect, Clauser và Zeilinger đã nghiên cứu và ứng dụng các trạng thái phi cổ điển vào thực tế rối lượng tử với thành công là giải Nobel Vật lý vào năm 2022. Khái niệm về các trạng thái phi cổ điển đã được đưa ra bởi Mandel với công trình được công bố vào năm 1986 về các trạng thái phi cổ điển của trường điện từ (Mandel, 1986). Theo đó, một trạng thái được gọi là phi cổ điển nếu trạng thái đó thể hiện một trong các tính chất phi cổ điển như tính chất nén, tính chất thống kê sub-Poisson, tính chất phản kết chùm hoặc tính chất rối. Trạng thái dịch chuyển Fock đơn mode được đưa ra bởi Wunsche (1991) và sự tương quan với tính chất chuẩn xác suất đã được nghiên cứu. Các trạng thái mới dựa trên trạng thái này đang được quan tâm nghiên cứu trong một vài năm gần đây. Ở ngoài nước, Malpani và các cộng sự (2019) đã dựa trên trạng thái này để đưa ra trạng thái dịch chuyển Fock đơn mode thêm hoặc bớt photon, xem xét tác động của việc thêm hoặc bớt photon lên tính chất phi cổ điển và pha của trạng thái dịch chuyển Fock đơn mode (Malpani et al., 2020), hay việc tăng cường tính phi Gauss và tính phi cổ điển của trạng thái dịch chuyển Fock thêm photon (Malpani et al., 2023). Faghihi (2020) cũng đã có công trình nghiên cứu về việc trạng thái dịch chuyển Fock bị biến dạng khi thêm hoặc bớt photon hay Karimi (2017) cũng đã đề cập đến việc xây dựng các trạng thái chồng chập của trạng thái dịch chuyển Fock.

Thời gian gần đây, Miry và các cộng sự (2023) đã nghiên cứu các tính chất phi cổ điển của trạng thái rối Schrödinger liên kết với trạng thái dịch chuyển Fock, Deepak và Chatterjee (2024) đã phân tích hiệu suất của trạng thái dịch chuyển Fock biến dạng dưới một hàm  $f$  trong dịch chuyển lượng tử liên tục hay Shijie cùng các cộng sự (2025) đã tính toán hiệu quả của toán tử dịch chuyển dựa trên trạng thái Fock khi xem xét nhiễu nhiệt trong quá trình chuẩn bị các đầu dò quang học. Ở trong nước, Phan Ngọc Duy Tịnh và các cộng sự (2024) cũng đã nghiên cứu về các tính chất phi cổ điển của trạng thái dịch chuyển Fock hai mode. Trạng thái dịch chuyển Fock đơn mode đã được đề xuất bởi Wunsche (1991) nhưng việc nghiên cứu các tính chất phi cổ điển bậc thấp cũng như các tính chất phi cổ điển bậc cao của trạng thái này vẫn chưa được thực hiện. Do đó, trong bài báo này chúng tôi nghiên cứu các tính chất phi cổ điển bậc thấp cũng như bậc cao của trạng thái dịch chuyển Fock đơn mode, đó là tính chất nén ở mục 2, tính chất

*Tác giả liên hệ: Trương Minh Đức;**Địa chỉ e-mail: [truongminhduc@dhsphue.edu.vn](mailto:truongminhduc@dhsphue.edu.vn)**DOI: <https://doi.org/10.26459/jse.072.2025>*

thống kê sub-Poisson bậc cao ở mục 3 và cuối cùng là phần kết luận.

## 2. TÍNH CHẤT NÉN CỦA TRẠNG THÁI DỊCH CHUYỂN FOCK ĐƠN MODE

### 2.1. Trạng thái dịch chuyển Fock đơn mode

Trạng thái dịch chuyển Fock đơn mode đã được đưa ra bởi Wunsche (1991) có dạng như sau:

$$|\psi_{n,\alpha}\rangle = \mathcal{N}_{n,\alpha} \mathcal{D}(\alpha) |n\rangle, \quad (1)$$

trong đó  $|\psi_{n,\alpha}\rangle$  được gọi là trạng thái dịch chuyển Fock đơn mode,  $\mathcal{N}_{n,\alpha} = 1$  là hệ số chuẩn hóa,  $\mathcal{D}(\alpha) = \exp(\alpha \hat{a}^+ - \alpha^* \hat{a})$  là toán tử dịch chuyển với  $\hat{a}$  là toán tử hủy hạt,  $\hat{a}^+$  là toán tử sinh hạt boson,  $\alpha$  là tham số dịch chuyển, và  $|n\rangle$  là trạng thái Fock. Khi  $n = 0$ , trạng thái dịch chuyển Fock đơn mode trở thành trạng thái kết hợp (Glauber, 1963; Sudarshan, 1963), đây là trạng thái cổ điển và mô tả rất tốt các tính chất của chùm sáng laser. Do đó, trong bài báo này, chúng tôi khảo sát các tính chất phi cổ điển của trạng thái dịch chuyển Fock đơn mode khi  $n \geq 1$ .

### 2.2 Tính chất nén Hillery của trạng thái dịch chuyển Fock đơn mode

Hillery đã định nghĩa các toán tử nén biên độ vuông bậc cao như sau (Hillery, 1987):

$$\hat{Z}_1 = \frac{1}{2} (\hat{a}^{+k} + \hat{a}^k) \quad \text{và} \quad \hat{Z}_2 = \frac{i}{2} (\hat{a}^{+k} - \hat{a}^k), \quad (2)$$

trong đó  $k$  là nguyên dương và nén Hillery bậc thấp khi  $k = 1$ , và bậc cao khi  $k \geq 2$ . Một trạng thái thể hiện tính chất nén đối với  $\hat{Z}_1$  khi trung bình phương sai của  $\hat{Z}_1$  phải nhỏ hơn giới hạn lượng tử chuẩn (Stoler, 1970; Hollenhorst, 1979):

$$\left\langle (\Delta \hat{Z}_1)^2 \right\rangle < \frac{1}{2} \left| \left\langle [\hat{Z}_1, \hat{Z}_2] \right\rangle \right| = \frac{1}{4} \left| \left\langle [\hat{a}^k, \hat{a}^{+k}] \right\rangle \right| \quad (3)$$

và tương tự đối với  $\hat{Z}_2$ . Để quá trình khảo sát thêm thuận tiện, ta đưa ra một đại lượng đặc trưng cho tính chất nén Hillery được gọi là thông số nén Hillery, thông số này có dạng:

$$\mathcal{H}_k = \left\langle (\Delta \hat{Z}_i)^2 \right\rangle - \frac{1}{4} \left| \left\langle [\hat{a}^k, \hat{a}^{+k}] \right\rangle \right|, \quad (4)$$

với  $i = 1, 2$ . Trạng thái sẽ thể hiện tính chất nén Hillery khi tính trung bình trong trạng thái đó thì  $\mathcal{H}_k < 0$ . Trong bài báo này, chúng tôi chỉ khảo sát đối với đại lượng  $Z_1$ , còn đại lượng  $Z_2$  hoàn toàn tương tự.

Thông số nén Hillery bậc thấp khi khảo sát trong trạng thái dịch chuyển Fock đơn mode trong phương trình (1) cho trường hợp bậc một ( $k = 1$ ) như sau:

$$\mathcal{H}_1 = n + \frac{1}{2}. \quad (5)$$

Vì  $n$  là trị riêng của toán tử số hạt boson  $\hat{n} = \hat{a}^+ \hat{a}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) nên không có bất kỳ giá trị nào của  $n$  để  $\mathcal{H}_1 < 0$ . Do đó trạng thái dịch chuyển Fock đơn mode không thể hiện tính chất nén Hillery bậc một.

Thông số nén Hillery bậc cao khi khảo sát trong trạng thái dịch chuyển Fock đơn mode trong phương trình (1) cho trường hợp bậc hai ( $k = 2$ ) như sau:

$$\mathcal{H}_2 = n^2 - n + 4 |\alpha|^2 n. \quad (6)$$

Điều kiện nén cho trường hợp bậc hai có dạng như sau:

$$\mathcal{H}_2 < 0 \quad \text{hay} \quad n < 1 - 4 |\alpha|^2. \quad (7)$$

Ta dễ dàng thấy vế phải của bất phương trình (7) là một hàm nghịch biến đối với  $|\alpha|$  và đạt giá trị lớn nhất bằng 1 khi  $|\alpha| = 0$ . Do đó, trạng thái dịch chuyển Fock đơn mode không thể hiện tính chất nén Hillery bậc hai.

Thông số nén Hillery tính trong trạng thái dịch chuyển Fock đơn mode trong phương trình (1) cho trường hợp bậc ba ( $k = 3$ ) như sau:

$$\mathcal{H}_3 = n^3 - 3n^2 + 2n + 9 |\alpha|^2 n^2 - 9 |\alpha|^2 n + 9 |\alpha|^4 n. \quad (8)$$

Điều kiện nén cho trường hợp bậc ba có dạng như sau:

$$\mathcal{H}_3 < 0 \quad \text{hay} \quad n^2 - 3n + 2 + 9 |\alpha|^2 n - 9 |\alpha|^2 + 9 |\alpha|^4 < 0. \quad (9)$$

Ta dễ dàng thấy vế trái của bất phương trình (9) luôn dương (vì  $n^2 - 3n + 2 \geq 0$  và  $9|\alpha|^2 n \geq 9|\alpha|^2$ ) khi  $n \geq 1$ . Do đó, trạng thái dịch chuyển Fock đơn mode không thể hiện tính chất nén Hillery bậc ba.

2.3 Tính chất nén Hong-Mandel của trạng thái dịch chuyển Fock đơn mode

Hong và Mandel (1985) đã đưa ra điều kiện nén bậc N như sau:

$$\langle (\Delta E_i)^{2N} \rangle < C^N (2N - 1)!!, \tag{10}$$

trong đó  $i = 1, 2$ , và số thực  $C$  được tính từ hệ thức giao hoán  $[\hat{E}_1, \hat{E}_2] = 2iC$  với  $\hat{E}_1$  và  $\hat{E}_2$  là các toán tử biên độ vuông bậc một đưa ra bởi phương trình (2). Để quá trình khảo sát thêm thuận tiện, ta đưa ra một đại lượng đặc trưng cho tính chất nén Hong-Mandel được gọi là thông số nén Hong-Mandel có dạng:

$$\mathcal{M}_N = \langle (\Delta E_i)^{2N} \rangle - C^N (2N - 1)!!, \tag{11}$$

với  $i = 1, 2$ , và quá trình nén Hong-Mandel bậc thấp xảy ra khi  $N = 1$ , và bậc cao khi  $N \geq 2$ . Trạng thái sẽ thể hiện tính chất Hong-Mandel nén khi  $\mathcal{M}_N < 0$ . Trong bài báo này, chúng tôi chỉ khảo sát đối với đại lượng  $E_1$ , đối với đại lượng  $E_2$  hoàn toàn tương tự.

Thông số nén Hong-Mandel tính trong trạng thái dịch chuyển Fock đơn mode trong phương trình (1) cho trường hợp bậc một ( $N = 1$ ) như sau:

$$\mathcal{M}_1 = n + \frac{1}{2}. \tag{12}$$

Ta thấy thông số nén Hong-Mandel bậc một hoàn toàn giống với thông số nén Hillery bậc một. Do đó, trạng thái dịch chuyển Fock đơn mode không thể hiện tính chất nén Hong-Mandel bậc một (bậc thấp).

Thông số nén Hong-Mandel bậc cao bắt đầu khi  $N \geq 2$ . Khi khảo sát trong trạng thái dịch chuyển Fock đơn mode trong phương trình (1) cho trường hợp bậc hai ( $N = 2$ ) ta có:

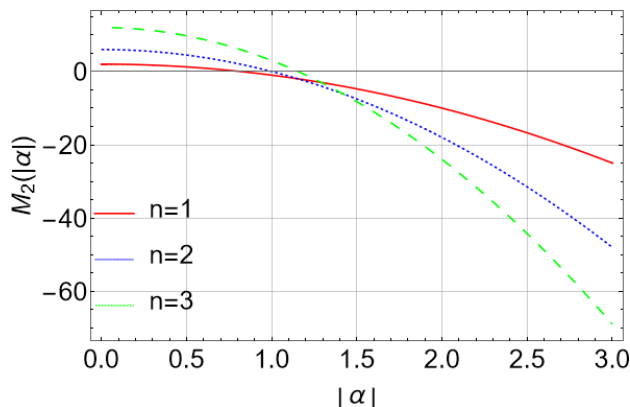
$$\mathcal{M}_2 = n^2 + n - 3n |\alpha|^2. \tag{13}$$

Đồ thị hình 1 khảo sát sự phụ thuộc của tham số nén Hong-Mandel bậc hai  $\mathcal{M}_2(|\alpha|)$  vào tham số dịch chuyển  $|\alpha|$ . Từ hình 1 cho thấy các đường với số hạt  $n = 1, n = 2$  và  $n = 3$  đều có nhánh nằm ở phần âm của trục tung, điều này cho thấy trạng thái dịch chuyển Fock đơn mode thể hiện tính chất nén Hong-Mandel bậc hai. Khi tăng số hạt thì độ dốc của các đường đồ thị càng tăng. Điều này cho thấy tính chất nén Hong-Mandel bậc hai càng mạnh khi  $n$  càng lớn. Vì tính chất này mà trạng thái dịch chuyển Fock đơn mode có thể được ứng dụng để cải thiện độ nhạy và độ chính xác trong các hệ đo như giao thoa kế lượng tử và các mạch lượng tử quang tuyến tính.

3. TÍNH THỐNG KÊ SUB-POISSON CỦA TRẠNG THÁI DỊCH CHUYỂN FOCK ĐƠN MODE

Khái niệm thống kê sub-Poisson đã được Glauber đề cập đến thông qua hàm tương quan bậc cao vào năm 1963 và đã được Daniel giới thiệu (Daniel et al., 2002) trong như sau:

$$g^{(l)} = \frac{\langle \hat{a}^{+l} \hat{a}^l \rangle}{\langle \hat{a}^+ \hat{a} \rangle^l}, \tag{14}$$



**Hình 1.** Sự phụ thuộc của  $\mathcal{M}_2(|\alpha|)$  vào tham số dịch chuyển  $|\alpha|$  với các giá trị khác nhau của số hạt  $n = 1, 2$  và  $3$ .

trong đó  $l$  là nguyên dương với  $l \geq 2$ , và tương ứng với thống kê sub-Poisson bậc thấp khi  $l = 2$ , và bậc cao khi  $l > 2$ . Đại lượng  $g^{(l)} < 1$  thì trạng thái thể hiện tính thống kê sub-Poisson bậc cao, trong đó  $g^{(l)}$  càng nhỏ hơn 1 thì mức thể hiện tính chất thống kê sub-Poisson càng cao. Để quá trình khảo sát thêm thuận tiện, ta đưa ra đại lượng  $P_l$  đặc trưng cho tính thống kê sub-Poisson bậc cao có dạng:

$$P_l = \frac{\langle \hat{a}^{+l} \hat{a}^l \rangle}{\langle \hat{a}^+ \hat{a} \rangle^l} - 1. \tag{15}$$

Khi tính trung bình của (15) trong trạng thái dịch chuyển Fock đơn mode thì trạng thái này sẽ thể hiện tính thống kê sub-Poisson bậc cao khi  $P_l < 0$ .

Tham số  $P_l$  khi tính trung bình trong trạng thái dịch chuyển Fock đơn mode trong phương trình (1) cho các trường hợp bậc hai ( $l = 2$ ), bậc ba ( $l = 3$ ) và bậc bốn ( $l = 4$ ) như sau:

- Bậc hai:

$$P_2 = \frac{n^2 - n + 4|\alpha|^2 n + |\alpha|^4}{(n + |\alpha|^2)^2} - 1. \tag{16}$$

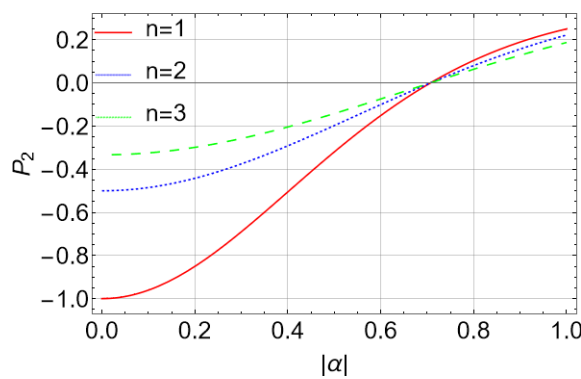
- Bậc ba:

$$P_3 = \frac{n^3 - 3n^2 + 2n + 9|\alpha|^2 n^2 - 9|\alpha|^2 n + 9|\alpha|^4 n + |\alpha|^6}{(n + |\alpha|^2)^3} - 1. \tag{17}$$

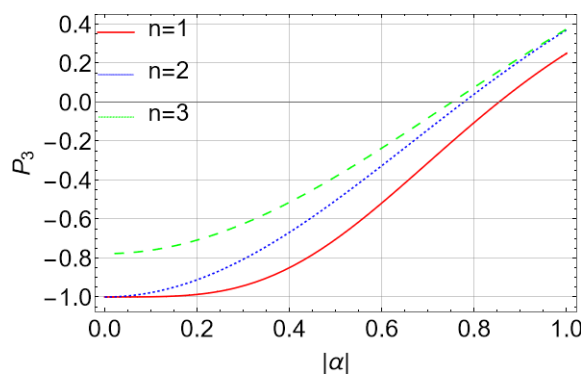
- Bậc bốn:

$$P_4 = \frac{n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n + 16|\alpha|^2 (n^3 - 3n^2 + 2n)}{(n + |\alpha|^2)^4} + \frac{36|\alpha|^4 (n^2 - n) + 16|\alpha|^6 n + |\alpha|^8}{(n + |\alpha|^2)^3} - 1. \tag{18}$$

Dựa vào các phương trình từ (16) đến (18) ta khảo sát sự phụ thuộc của các tham số  $P_2, P_3$  và  $P_4$  vào biên độ  $|\alpha|$  có dạng như sau:

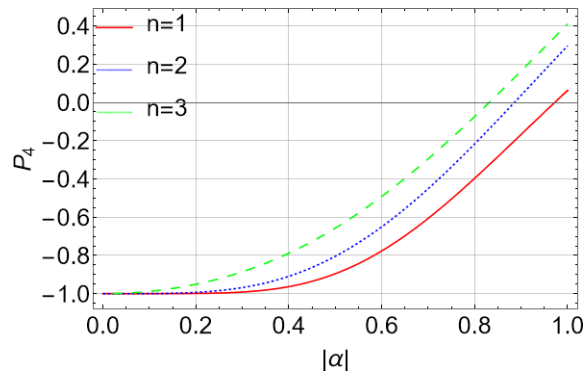


**Hình 2.** Sự phụ thuộc của tham số  $P_2$  vào biên độ dịch chuyển  $|\alpha|$  với các giá trị khác nhau của số hạt  $n = 1, 2$  và  $3$ .



**Hình 3.** Sự phụ thuộc của tham số  $P_3$  vào biên độ dịch chuyển  $|\alpha|$  với các giá trị khác nhau của số hạt  $n = 1, 2$  và  $3$ .

Từ các hình 2, hình 3 và hình 4 ta thấy đồ thị của các bậc có hình dạng khá tương đồng, trong đó trạng thái dịch chuyển Fock đơn mode đều thể hiện tính thống kê sub-Poisson trong các bậc hai, ba và bốn tương ứng với biên độ dịch chuyển  $|\alpha|$  trong khoảng từ 0 đến 1. Khi ở cùng bậc thì các đường có xu hướng dịch về phía trục hoành khi số hạt trong trạng thái Fock càng tăng. Do đó, mức độ thể hiện các tính chất này càng yếu khi số hạt càng lớn. Còn đối với cùng trạng số hạt thì ở bậc cao hơn, các đường đồ thị có xu hướng dịch về phần âm nhiều hơn. Do đó, mức độ thể hiện các tính chất này càng mạnh khi bậc càng cao. Như vậy, tính chất phân kết chùm bậc cao càng thể hiện thì càng tăng độ bảo mật hay trạng thái dịch chuyển Fock đơn mode có thể ứng dụng để thực hiện các bảo mật lượng tử trong công nghệ truyền thông lượng tử.



**Hình 4.** Sự phụ thuộc của tham số  $P_4$  vào biên độ dịch chuyển  $|\alpha|$  với các giá trị khác nhau của số hạt  $n = 1, 2$  và  $3$ .

#### 4. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, chúng tôi đã khảo sát các tính chất phi cổ điển bậc thấp và bậc cao của trạng thái dịch chuyển Fock đơn mode. Kết quả cho thấy trạng thái dịch chuyển Fock đơn mode không thể hiện tính chất nén Hillery bậc một, hai và bậc ba. Tuy nhiên, trạng thái này lại thể hiện tính chất nén Hong-Mandel bậc hai (bậc cao) khi số hạt  $n \geq 1$ . Số hạt càng tăng thì tính chất nén Hong-Mandel bậc hai càng thể hiện rõ. Về tính thống kê sub-Poisson thì trạng thái dịch chuyển Fock đơn mode thể hiện rõ tính thống kê sub-Poisson đối với các bậc hai, ba và bốn, nghĩa là đều thể hiện rõ cả ở bậc thấp và bậc cao. Các trường hợp bậc hai, ba và bốn chỉ thể hiện các tính chất nói trên khi số hạt  $n \geq 1$ , và không thể hiện khi  $n = 0$ . Điều này là hoàn toàn chính xác bởi vì khi  $n = 0$  thì trạng thái dịch chuyển Fock đơn mode trở thành trạng thái kết hợp và đây không phải là trạng thái phi cổ điển. Khi thay đổi các tham số thì mức độ thể hiện tính thống kê sub-Poisson bậc thấp và bậc cao của trạng thái dịch chuyển Fock đơn mode là khác nhau, đối với cùng bậc thì các tính chất này càng yếu khi số hạt càng lớn, còn đối với cùng trạng thái số hạt thì các tính chất này càng mạnh khi bậc càng cao. Như vậy, trạng thái dịch chuyển Fock đơn mode là một trạng thái phi cổ điển và tính chất phi cổ điển của trạng thái này thể hiện càng rõ ở bậc cao. Các kết quả nghiên cứu về các trạng thái dịch chuyển Fock đơn mode thêm hoặc bớt photon (Malpani et al., 2019) và trạng thái dịch chuyển Fock hai mode (Phan et al., 2024) cũng đều kết luận rằng các trạng thái này đều là các trạng thái phi cổ điển. Tuy nhiên, các tính chất phi cổ điển của các trạng thái được tăng cường hay không phụ thuộc vào số photon thêm vào trạng thái gốc ban đầu. Từ đó ta nhận thấy tác dụng của các toán tử dịch chuyển lên các trạng thái Fock hay tác động làm thay đổi số photon trong trạng thái Fock thì các tính chất phi cổ điển của các trạng thái dịch chuyển Fock vẫn được duy trì và có thể được tăng cường hay không tùy thuộc vào các tham số đầu vào của hệ.

**Lời cảm ơn:** Nghiên cứu này được tài trợ bởi Bộ Giáo dục và Đào tạo thông qua đề tài khoa học và công nghệ cấp Bộ, mã số: B2025-DHH-03.

#### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- Daniel, E., Vyas, R., & Surendra, S. (2002). Higher-order sub-Poissonian photon statistics in terms of factorial moments. *Journal of the Optical Society of America B*, 19(6), 1471–1476.
- Deepak and Chatterjee A. (2024), “Analyzing performance of  $f$ -deformed displaced Fock state in continuous-variable quantum teleportation”, *Physica Scripta*, 99, 095124.
- Faghihi, M. J. (2020). Generalized photon-added and subtracted  $f$ -deformed displaced Fock states. *Annalen der Physik*, 532(12), 2000215. <https://doi.org/10.1002/andp.202000215>
- Glauber, R. J. (1963). Coherent and incoherent states of the radiation field. *Physical Review*, 131(6), 2766–2788. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.131.2766>

- Hillery, M. (1987). Squeezing of the square of the field amplitude in second harmonic generation. *Optics Communications*, 62(2), 135–138. [https://doi.org/10.1016/0030-4018\(87\)90117-1](https://doi.org/10.1016/0030-4018(87)90117-1)
- Hollenhorst, J. N. (1979). Quantum limits on resonant-mass gravitational radiation detectors. *Physical Review D*, 19(6), 1669–1679. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.19.1669>
- Hong, C. K., & Mandel, L. (1985). Higher-order squeezing of a quantum field. *Physical Review Letters*, 54(4), 323–325. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.54.323>
- Karimi, A. (2017). Construction of the superposition of displaced Fock states and entangled displaced Fock states. *International Journal of Theoretical Physics*, 56(9), 2703–2715. <https://doi.org/10.1007/s10773-017-3436-2>
- Malpani, P., Alam, N., Thapliyal, K., Narayanan, V., & Banerjee, S. (2019). Lower- and higher-order nonclassical properties of photon-added and subtracted displaced Fock states. *Annalen der Physik*, 531(2), 1800318. <https://doi.org/10.1002/andp.201800318>
- Malpani, P., Thapliyal, K., Alam, N., Pathak, A., Narayanan, V., & Banerjee, S. (2020). Impact of photon addition and subtraction on nonclassical and phase properties of a displaced Fock state. *Optics Communications*, 459, 124964. <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2019.124964>
- Malpani, P., Thapliyal, K., Banerji, J., & Pathak, A. (2023). Enhancement of non-Gaussianity and nonclassicality of photon-added displaced Fock state: A quantitative approach. *Annalen der Physik*, 535(1), 2200261. <https://doi.org/10.1002/andp.202200261>
- Mandel, L. (1986). Non-classical states of the electromagnetic field. *Physica Scripta*, T12, 34–42. <https://doi.org/10.1088/0031-8949/1986/T12/005>
- Miry S. R., Faghihi M. J. and Mahmoudi H. (2023), “Nonclassicality of entangled Schrödinger cat states associated to generalized displaced Fock states”, *Physica Scripta*, 98, 125109.
- Phan, T. D. N., Le, T. T. H., & Truong, D. M. (2024). Nonclassical properties of two-mode displaced Fock state. *Dalat University Journal of Science*, 14(3S), 3–12.
- Shijie D., Renzhi Y., Chuang Y., and Mugen P. (2025), “Estimation of displacement operations based on Fock states considering thermal noise in preparing probes”, *Optics Letters*, 50 (7), 2413.
- Stoler, D. (1970). Equivalence classes of minimum uncertainty packets. *Physical Review D*, 1(12), 3217–3219. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.1.3217>
- Sudarshan, E. C. G. (1963). Equivalence of semiclassical and quantum mechanical descriptions of statistical light beams. *Physical Review Letters*, 10(7), 277–279. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.10.277>
- Wünsche, A. (1991). Displaced Fock states and their connection to quasiprobabilities. *Quantum Optics: Journal of the European Optical Society Part B*, 3, 359–383.

---

## Nonclassical properties of single-mode displaced Fock state

Do Chinh Hạp, Trương Minh Đức

*Faculty of Physics, University of Education, Hue University.*

---

### ARTICLE INFO

*Article history:*

*Received 22 July 2025*

*Received in revised form 03 October 2025*

*Accepted 06 October 2025*

*Published 20 October 2025*

*Keywords:*

*Hillery squeezing*

*Hong–Mandel squeezing*

*Sub-Poissonian statistics*

*Photon antibunching*

*Single-mode displaced Fock State.*

*Corresponding author:*

*Truong Minh Duc*

*E-mail address:*

*truongminhduc@dhsphue.edu.vn*

---

### ABSTRACT

In this paper, we investigate the nonclassical properties of the single-mode displaced Fock state, specifically lower- and higher-order Hillery squeezing, Hong-Mandel squeezing, and sub-Poisson statistics. The results show that the single-mode displaced Fock state does not exhibit lower- and higher-order Hillery squeezing but does exhibit higher-order Hong-Mandel squeezing. Furthermore, this state exhibits sub-Poisson statistics at both lower and higher orders, corresponding to the number of particles in the Fock state  $n \geq 1$ . Thus, the single-mode displaced Fock state is nonclassical, and its nonclassical properties are well demonstrated.